Polski Rejestr Statków

Raport Techniczny nr 71

STATECZNOŚĆ STATKU SWOBODNIE PŁYWAJĄCEGO

Raport końcowy

Maciej Pawłowski

Wydanie 2. zmienione i uaktualnione

Gdańsk, styczeń 2016

SPIS TREŚCI

STRESZCZENIE 2
1. WSTĘP 3
2. RYS HISTORYCZNY 3
3. SFORMALIZOWANIE PROBLEMU 4
4. CHARAKTERYSTYKI STATECZNOŚCI 8
4.1. Podstawowe zależności 8
4.2. Ramię prostujące 13
4.3. Obliczanie momentów bezwładności 14
4.4. Promienie metacentryczne. Oś pływania 17
4.5. Mechanizm przechyłów równoobjętościowych 22
4.6. Własności krzywej ramion prostujących 26
4.7. Pantokareny 28
5. KINEMATYKA STATKU SWOBODNEGO 29
6. KRZYWA RAMION MINIMALNEJ STATECZNOŚCI 33
7. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE 37
7.1. Statki 38
7.2. Platformy samopodnośne 43
8. WNIOSKI 53
OD AUTORA 54
BIBLIOGRAFIA 54
Ważniejsze oznaczenia literowe i symbole 57

STRESZCZENIE

Sformułowano problem obliczeń ramion prostujących statku swobodnie pływającego, tj. wzdłużnie zrównoważonego przy każdym kącie przechyłu. Ramiona prostujące są niejednoznaczne w takim przypadku, gdyż zależą od sposobu równoważenia statku. Omówiono trzy przypadki, gdy równoważymy statek obracając go względem śladu wody na owrężu, względem normalnej do płaszczyzny symetrii statku oraz względem normalnej do wodnicy pierwotnej, obracającej się razem ze statkiem, tożsamy z minimalną statecznością. We wszystkich tych przypadkach kierunek momentu prostującego w przestrzeni oraz pole pod krzywymi ramion prostujących, które jest najmniejsze z możliwych, są zachowane. Przemieszczenia kątowe (tj. przechył i przegłębienie) są kątami Eulera, związanymi z odpowiednią osią referencyjną. Podano najważniejsze własności krzywej ramion statku swobodnie pływającego. Wpływ sposobu równoważenia na stateczność zilustrowano przykładami obliczeniowymi.

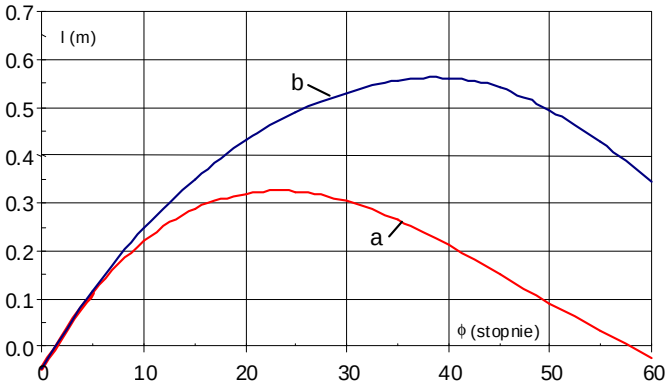
Niniejszy raport jest rozwinięciem teorii zawartych w Raportach Technicznych Nr 34/99 i 46/02 oraz w publikacji [7].

Data aktualizacji: 26 I 2016 r.

1. WSTĘP

Podstawą badania stateczności statku jest krzywa ramion prostujących w funkcji kąta przechyłu. Towarzystwa klasyfikacyjne wymagają, by w stanie nieuszkodzonym obliczać ją dla statku na równej stępce. W przypadku statku uszkodzonego nie wypowiadają się jasno, jak należy obliczać krzywą ramion, co bywa przyczyną znacznych rozbieżności wyników.

Dla statku nieuszkodzonego, zwłaszcza dużego, nie ma większego znaczenia, czy obliczenia wykonuje się z ustalonym przegłębieniem, stałym w funkcji kąta przechyłu, czy też dla statku swobodnie pływającego, zmieniającego przegłębienie w zależności od wzdłużnego zrównoważenia. Powodem jest niewielka asymetria statku względem płaszczyzny owręża. Dla statku uszkodzonego reżim obliczeniowy jest jednak istotny, gdyż znacząco wpływa na wielkość krzywej ramion prostujących powyżej kąta wejścia pokładu do wody (Rys. 1). Przez ramię prostujące rozumie się odległość między liniami działania siły wyporu i siły ciężkości na wodzie spokojnej, przy zadanym kącie przechyłu.



Rys. 1. Krzywe ramion prostujących platformy w stanie uszkodzonym [1]
a – swobodnie pływającej, b – z ustalonym przegłębieniem

Wpływ reżimu obliczeniowego jest szczególnie duży w przypadku zatopienia przedziałów nieleżących na śródokręciu, ze względu na występującą asymetrię wzdłużną wodnicy i mały kąt wejścia pokładu do wody. Wpływ ten silnie wzrasta ze zmniejszeniem stosunku L/B, jest zatem spotęgowany dla katamaranów, statków typu SWATH, platform półzanurzeniowych, czy samopodnośnych.

Można udowodnić, co zrobimy później, że krzywa ramion prostujących statku swobodnie pływającego jest niewiększa, niż statku z ustalonym przegłębieniem, jak na Rys. 1. Z tego względu powinna być obliczana dla statku swobodnie pływającego. W takiej sytuacji pojawia się problem rozumienia kąta przechyłu, bo jest to wówczas pojęcie niejednoznaczne.

Stateczność statku swobodnie pływającego jest stosunkowo nowym zagadnieniem, badanym głównie w pracach Vassalosa *et al* [2], van Santena [3], autora [4–7] i innych.

2. RYS HISTORYCZNY

Dlaczego ciała pływają, wiedziano już w starożytności od czasów Archimedesa (ok. 287–212 przed Chr.). Jak natomiast oceniać i badać stateczność ciał pływających poznano dopiero po odkryciu praw Newtona. W 1746 r. Bouguer wprowadził pojęcie metacentrum oraz wysokości metacentrycznej, jako miary stateczności początkowej [8]. W 1749 r. Euler podał twierdzenie o wodnicach równoobjętościowych i wzór na promień metacentryczny. W 1796 r. Atwood opublikował metodę obliczania ramienia prostującego dla dowolnego kąta przechyłu w pracach

[9, 10], opartej na przesuwaniu objętości klinów. Z metody tej wynika, że wolna burta ma kluczowe znaczenie dla stateczności. Tym niemniej, przez ponad sto lat do oceny stateczności używano wyłącznie początkowej wysokości metacentrycznej *GM*. Dopiero wypadki statecznościowe pod koniec XIX wieku zwróciły uwagę na znaczenie wolnej burty i konieczność stosowania krzywej ramion prostujących do oceny stateczności statków.

Wysokość metacentryczna, stanowiąca skądinąd ważny wskaźnik stateczności, nie pozwala wnioskować wprost ani o zakresie krzywej ramion, ani też o wielkości maksymalnego ramienia prostującego. Można tu wspomnieć szeroko opisywane w literaturze zatonięcie okrętu marynarki brytyjskiej *Captain* w 1870 r., którego wysokość metacentryczna $GM = 0{,}79$ m, praca [11]. Okręt ten przewrócił się w czasie sztormu w Zatoce Biskajskiej, podczas gdy towarzyszący mu pancernik *Monarch*, o zbliżonej wielkości i cechach, mający mniejszą wysokość metacentryczną $GM = 0{,}73$ m, przetrwał sztorm bez szwanku. Dla ówczesnych inżynierów budowy okrętów było to wielkie zaskoczenie. Wytłumaczenie wypadku jest proste: wolne burty obydwu okrętów bardzo się różniły: wolna burta *Captaina* wynosiła $F = 1{,}98$ m, a *Monarcha* – $F = 4{,}27$ m. W rezultacie, pomimo mniejszej wysokości metacentrycznej, krzywa ramion prostujących *Monarcha* miała znacznie lepsze parametry niż *Captaina*: maksymalne ramię prostujące było równe $l_{max} = 0{,}55$ m, zamiast 0,25 m, $\phi_{max} = 40°$, zamiast 19°, a zakres stateczności $\phi_z = 70°$, zamiast 54°.

Wypadek *Captaina* ostatecznie wykazał, że wysokość metacentryczna jest niewystarczającą miarą bezpieczeństwa statecznościowego i zmusił do badania stateczności przy dużych kątach przechyłu. W efekcie, pod koniec XIX w. do oceny stateczności statku zaczęto stosować krzywe ramion prostujących, zwane *krzywymi Reeda*, na cześć admirała, który je rozpropagował [12]. Pierwsze kryteria stateczności pojawiły się dopiero w 1939 r., podane przez Raholę [13]. Są to zalecenia dotyczące minimalnych parametrów krzywej ramion, opracowane na podstawie analizy krzywej ramion prostujących statków, które przewróciły się podczas eksploatacji, i statków, które nie miały problemów ze statecznością. Pod koniec lat 1960. kryteria te zostały zaaprobowane przez IMCO[1], obecnie IMO, i obowiązują do dzisiaj [14].

Mimo stosowania krzywej ramion do oceny stateczności statków nieuszkodzonych, stateczność statku w stanie awaryjnym (tj. po utracie integralności poszycia w wyniku kolizji) była dalej normowana za pomocą wysokości metacentrycznej i wolnej burty. Konwencje SOLAS zadawalały się resztkową wolną burtą o wysokości zaledwie trzech cali i wysokością metacentryczną równą dwa cale. Przy takich parametrach krzywe ramion prostujących mają wartości śladowe. Zmiana nastąpiła dopiero w 1990 roku, gdy wprowadzono normowanie krzywej ramion w postaci kryteriów zwanych SOLAS 90, wg wydania [15]. Kryteria te nie stanowiły jednak istotnego postępu, gdyż powstały w wyniku decyzji administracyjnych, niepopartych żadnymi badaniami. Stąd miały jedynie domniemany, a nie rzeczywisty związek z faktycznym bezpieczeństwem statku w stanie awaryjnym. Przełom nastąpił dopiero w 1995 roku, gdy odkryty został mechanizm przewracania się statków ro-ro po utracie integralności burty, omówiony w pracach [16–19]. Mechanizm ten pozwala ustalić związek między stanem morza i statecznością w stanie awaryjnym, zabezpieczającą statek przed przewróceniem.

3. SFORMALIZOWANIE PROBLEMU

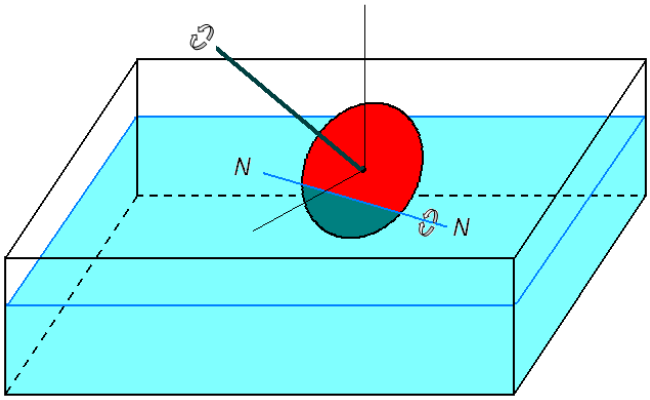
Niemal wszystkie powszechnie znane metody obliczania krzywej ramion prostujących dotyczą statku pływającego na równej stępce. Oznacza to milczące założenie, że środek wyporu podczas przechyłów nie doznaje wzdłużnych przemieszczeń, czyli przemieszcza się w płaszczyźnie

[1] Inter-Governmental Maritime Consultative Organisation – Międzyrządowa Morska Organizacja Doradcza z siedzibą w Londynie, powołana w 1958 r., przekształcona w 1982 r. w International Maritime Organisation – Międzynarodową Organizację Morską; jest to agenda ONZ ds. bezpieczeństwa życia na morzu

wręgowej. Wcześniej nie było potrzeby zastanawiania się nad inną sytuacją, bo obliczenia dotyczyły wyłącznie statków nieuszkodzonych, gdzie założenie to jest dobrze spełnione. Jednak w sytuacjach, gdy środek wyporu doznaje wzdłużnych przemieszczeń, co ma miejsce, gdy wodnica jest asymetryczna względem płaszczyzny obrotu (tj. o dużym momencie dewiacyjnym), faktu tego nie można dłużej ignorować i obliczenia trzeba wykonywać dla obiektu swobodnie pływającego, wzdłużnie zrównoważonego. Krzywa ramion staje się wówczas niejednoznaczna, zależna od sposobu równoważenia statku.

Warto podkreślić, że ruchy kątowe obiektu swobodnie pływającego wykraczają poza podstawową wiedzę okrętową. W klasycznej teorii okrętu krzywą ramion wyznacza się dla statku o stałym przegłębieniu, wykonującego elementarny obrót o jednym stopniu swobody. Tymczasem statek swobodnie pływający zmienia przegłębienie podczas przechylania, czyli wykonuje ruch przestrzenny o dwóch stopniach swobody. Ze względu na przestrzenny charakter przemieszczeń kątowych, w pracy niniejszej będzie stosowany rachunek wektorowy.

Orientację ciała w przestrzeni definiują trzy kąty Eulera, związane z *osią referencyjną*. W wypadku statku swobodnie pływającego, stosuje się dwa kąty, gdyż trzeci, opisujący azymut (orientację statku względem kierunku wiatru) odpada, gdyż z definicji, azymut jest stały. Jeden z kątów gra rolę kąta przechyłu, a drugi – kąta przegłębienia. W literaturze przedmiotu nazywane są często jako uogólniony kąt przechyłu i przegłębienia. Zmiana jednego z nich nie wpływa na drugi. Płaszczyzna normalna do osi referencyjnej nie ma nazwy w mechanice, będziemy nazywali ją *płaszczyzną referencyjną*. Jeden obrót odbywa się wokół osi referencyjnej, a drugi wokół *linii węzłów NN*, tj. śladu wody w płaszczyźnie referencyjnej (Rys. 2).



Rys. 2. Kąty Eulera

Osią referencyjną jest zwyczajowo jedna z osi układu współrzędnych. Mamy więc trzy osie referencyjne, trzy płaszczyzny referencyjne, prostopadłe do nich, i trzy linie węzłów. Warto jednak pamiętać, że za oś referencyjną można wybrać dowolną oś, jeśli zachodzi taka potrzeba.

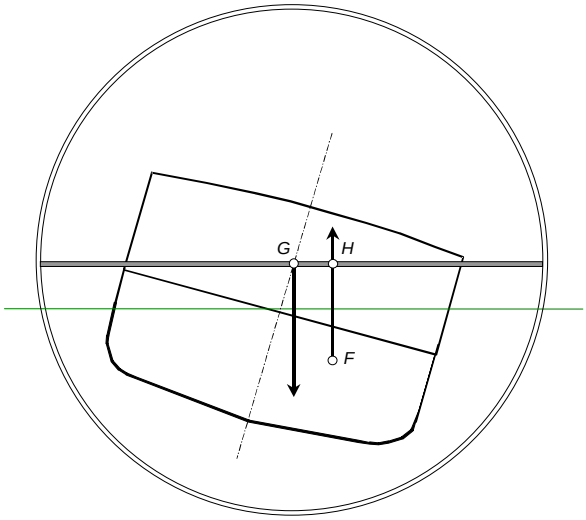
Gdy linią węzłów jest ślad wody na owrężu, kąty Eulera związane są z osią *x*, normalną do owręża. Są to kąty φ i Θ. Pierwszy z nich jest kątem przechyłu, tj. kątem nachylenia śladu wody na owrężu względem osi *y*, a drugi – kątem przegłębienia, tj. kątem nachylenia osi *x* względem poziomu. Płaszczyzną referencyjną jest dowolny wręg, nie tylko owręże. Gdy w położeniu wyprostowanym statek jest przegłębiony, kąty Eulera związane są z osią *x*′, prostopadłą do wręgów pionowych. Są to kąty φ' i Θ'. Pierwszy z nich jest kątem nachylenia śladu wody na wręgu pionowym względem osi *y*, a drugi – kątem nachylenia osi *x*′ względem poziomu. Wręgi pionowe odchylone są od wręgów o kąt przegłębienia wstępnego θ_0, i obracają się razem ze statkiem.

Gdy linią węzłów jest ślad wody w PS, kąty Eulera związane są z osią *y*, normalną do PS. Są to kąty ϕ i θ. Pierwszy z nich jest kątem przechyłu, tj. kątem obrotu PS wokół śladu wody w PS,

równym nachyleniu osi *y* względem poziomu, zaś drugi jest kątem przegłębienia, tj. kątem obrotu PS wokół osi *y*, równym kątowi nachylenia śladu wody w PS względem osi *x*. W przeciwieństwie do poprzedniej sytuacji, przegłębienie statku w położeniu wyprostowanym $\phi = 0$ nie wpływa na znaczenie tych kątów.

Gdy linią węzłów jest ślad wody na wodnicy pierwotnej (jest to wodnica w położeniu wyprostowanym statku, obracająca się razem ze statkiem), kąty Eulera związane są z osią *Oz′*, prostopadłą do wodnicy pierwotnej (gdy w położeniu wyprostowanym statek pływa na równej stępce, osią referencyjną jest oś *Oz*, prostopadła do PP). Kątami Eulera są odpowiednio kąty α' i ϑ' czy α i ϑ. Pierwszy z nich jest kątem przechyłu, tj. kątem obrotu wodnicy pierwotnej wokół linii węzłów, równym kątowi odchylenia osi *Oz′* od pionu, a drugi – kątem przegłębienia, zwanym też *kątem skrętu* lub *azymutem*, tj. kątem obrotu wodnicy pierwotnej wokół osi *Oz′*, równym kątowi między śladami wody i PS na wodnicy pierwotnej. Płaszczyzną referencyjną jest też dowolna płaszczyzna równoległa do wodnicy pierwotnej. Dla statku na równej stępce, jest nią w szczególności PP.

Dla statku przechylanego bez równoważenia, wszystkie trzy kąty przechyłu są jednakowe, tj. $\varphi' = \phi = \alpha'$, zaś kąty przegłębienia są zerowe, tj. $\Theta' = \theta = \vartheta' = 0$. Jeśli okręt pływa swobodnie, to przy zadanym kącie przechyłu przegłębi się tak, by był wzdłużnie zrównoważony. W pierwszym przypadku przegłębi się (obróci) pionowo wokół śladu wody na wręgu pionowym (Rys. 3), w drugim – wokół osi *y* (Rys. 4), a w trzecim – wokół osi *Oz′* (Rys. 5). W dwóch ostatnich sytuacjach, statek przegłębia się ukośnie do pionu.



Rys. 3. Pionowe przegłębianie statku

Zwróćmy uwagę, że dla przegłębienia $\Theta' = 90°$ kąt φ' traci znaczenie kąta przechyłu, a dla przechyłu $\phi = 90°$ (PS jest pozioma) przegłębienie θ jest nieoznaczone. Jedynie w przypadku osi referencyjnej *Oz′* obydwa kąty nie tracą znaczenia, gdy przyjmują wartość 90°.

Zrównoważenie zachodzi, gdy środek wyporu znajdzie się w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez środek ciężkości statku, zwanej *płaszczyzną obrotu*. W przestrzeni, jest to jedna płaszczyzna (duże koło na wspomnianych rysunkach): w pierwszym przypadku – *równoległa* do linii węzłów, a w dwóch pozostałych – *prostopadła*. Uwzględniając, że linia węzłów jest stała w przestrzeni, kierunek momentu prostującego jest także stały (co nie oznacza, że nie jest zmienny w układzie osi kadłuba). Wynika stąd natychmiast, że krzywa środków wyporu jest krzywą ściśle płaską, leżącą w płaszczyźnie obrotu (dla statku z ustalonym przegłębieniem, krzywa ta jest rzutem krzywej przestrzennej na płaszczyznę obrotu). Wersor prostopadły do płaszczyzny obrotu, oznaczany dalej przez $\boldsymbol{e}$, jest więc stały w przestrzeni i nazywa się *osią obrotu*.

Obliczenia krzywej ramion prostujących statku swobodnie pływającego prowadzi się przy następujących założeniach:

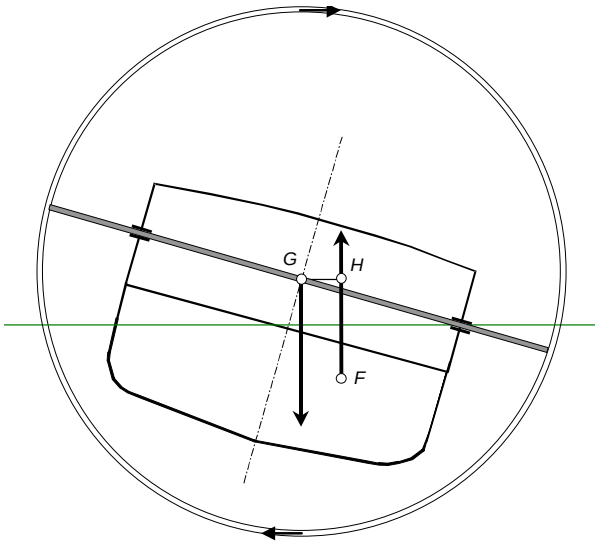
a) *na statek działa statycznie czysty moment przechylający*. Oznacza to, że przechyły są równoobjętościowe;

b) *wektor momentu przechylającego jest ściśle poziomy*. Gdyby tak nie było, istniałaby składowa pionowa, która obracałaby statkiem wokół osi pionowej;

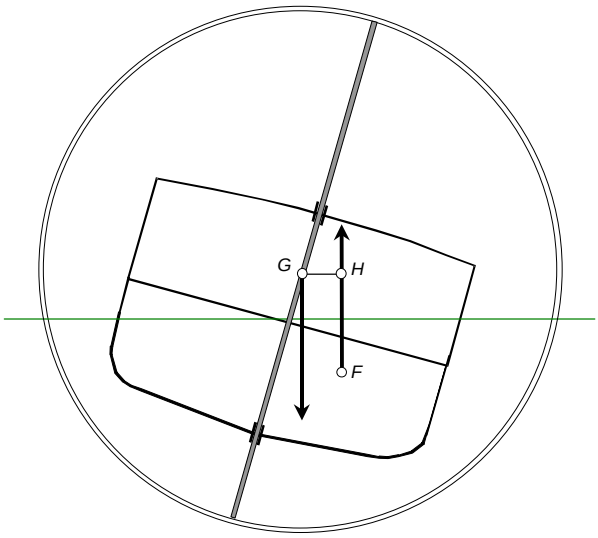
c) *wektor momentu przechylającego jest prostopadły do płaszczyzny obrotu*. Gdyby tak nie było, okręt nie byłby wzdłużnie zrównoważony;

d) *okręt jest w równowadze statycznej*, tzn. suma sił i momentów działających na statek zeruje się. Zatem ciężar statku równa się wyporowi, tj. $P = D$, a przyłożony moment przechylający jest zrównoważony momentem prostującym o takim samym kierunku, lecz przeciwnym zwrocie;

e) *moment prostujący tworzy para sił*: tj. siła ciężkości przechodząca przez środek ciężkości statku i siła wyporu przechodząca przez środek wyporu – siły te są sobie równe, lecz przeciwnie skierowane. Wektor tego momentu jest skierowany poziomo, prostopadle do płaszczyzny obrotu.



Rys. 4. Ukośne przegłębianie statku wokół osi *y*



Rys. 5. Ukośne przegłębianie statku wokół osi *Oz*′

Z przyjętych założeń wynikają pewne konsekwencje.

1. Dla przechyłów z ustalonym przegłębieniem środek wyporu nie musi znajdować się w płaszczyźnie obrotu, co powoduje, że moment działający na statek nie ma stałego kierunku w płaszczyźnie poziomej.

2. Ramię prostujące $l \equiv GH$ jest ramieniem pary tworzącej moment prostujący, mierzonym w płaszczyźnie obrotu; jest ono funkcją kąta obrotu η płaszczyzny obrotu wokół osi obrotu $\boldsymbol{e}$. W drugim przypadku $\eta \equiv \phi$, a w trzecim $\eta \equiv \alpha'$. W pierwszym przypadku, $\eta < \varphi$; zależność jest bardziej złożona.

3. Ponieważ położenie statku względem płaszczyzny obrotu jest niejednoznaczne, zależy bowiem od przyjętej linii węzłów i związanego z tym sposobu równoważenia, krzywe ramion są także niejednoznaczne. Ślad wody w PS (Rys. 4) jest odpowiedni dla statków nieuszkodzonych, gdyż idealizuje kierunek działania momentu od wiatru. Krawędź przecięcia się wodnicy pierwotnej z powierzchnią wody jest natomiast odpowiednia dla statków uszkodzonych, gdzie przechyły odbywają się pod wpływem sił grawitacyjnych, przyjmujących w położeniu równowagi minimum energii potencjalnej. W przypadku obiektów dowolnie usytuowanych w stosunku do kierunku wiatru, jak platformy półzanurzeniowe, PS należy zastąpić płaszczyzną naporu wiatru, ustawioną w położeniu wyjściowym prostopadle do kierunku wiatru i obracającą się razem z obiektem. Kąty Eulera definiuje układ $Ox''y'z'$, związany z tym ekranem.

4. Można zauważyć, że rzut osi *y* na płaszczyznę poziomą jest prostopadły do śladu wody w PS. Stąd, przedstawiony model działania momentu przechylającego odpowiada momentowi przechylającemu wywołanemu przesunięciem ładunku w płaszczyźnie poprzecznej statku. Dotyczy to także momentu przechylającego w stanie awaryjnym wywołanego gromadzeniem się wody na pokładzie jezdnym statków ro-ro, gdy zatopiony został przedział symetryczny poło-

żony na śródokręciu. Z tego samego względu krzywa ramion prostujących mierzona metodą Di Belli, jest ściśle zgodna z tym modelem. W metodzie tej mierzy się kąt przechyłu modelu wywołany przesuwaniem ciężarka po ramieniu prostopadłym do PS, tożsamy z kątem nachylenia ramienia względem poziomu.

5. Ponieważ moment prostujący jest stale prostopadły do płaszczyzny obrotu, praca momentu prostującego jest całką tegoż momentu względem kąta obrotu η płaszczyzny obrotu, tożsamego z kątem przechyłu, zależnego od doboru linii węzłów. Jest to zarazem najmniejsza praca, jaką trzeba wykonać by przechylić okręt do zadanego kąta. Inaczej mówiąc, dla statku z ustalonym przegłębieniem lub niecałkowicie zrównoważonym, praca momentu jest większa.

4. CHARAKTERYSTYKI STATECZNOŚCI

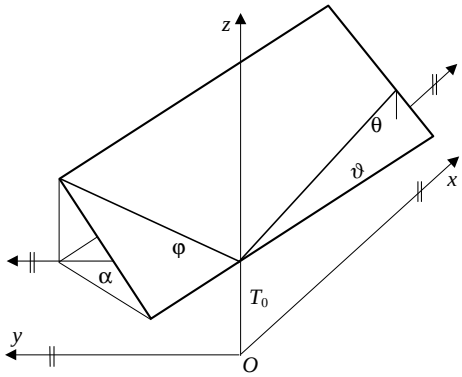
Zajmiemy się teraz określaniem podstawowych wielkości, związanych z charakterystykami stateczności statku swobodnie pływającego, takimi jak kąt obrotu, ramię prostujące, momenty bezwładności wodnicy (tj. przekroju kadłuba przez powierzchnię morza), promienie metacentryczne, oś pływania, pantokareny. Punktem wyjścia jest opis wodnicy dowolnie nachylonej, niezależny od wyboru osi referencyjnej.

4.1. Podstawowe zależności

Wprowadzimy prawoskrętny układ osi kadłuba *Oxyz*, jak na Rys. 6. Punkt *O* pokrywa się z punktem *K*, oś *Ox* skierowana jest w stronę dziobu, oś *Oy* – na lewą burtę, a oś *Oz* – do góry. Dowolnie nachyloną wodnicę w układzie kadłuba przedstawia równanie:

$$z = T_0 + x\,\mathrm{tg}\theta + y\,\mathrm{tg}\varphi \tag{1}$$

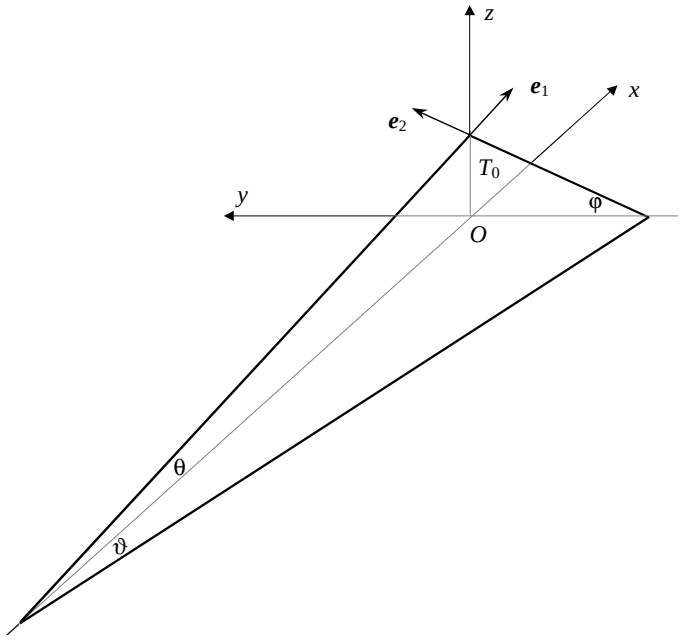
w którym występują trzy niezależne parametry: kąt nachylenia śladu wody θ w PS względem osi *Ox*, kąt nachylenia śladu wody φ w płaszczyźnie owręża względem osi *Oy* oraz zanurzenie T_0 osi *Oz*. Kąty φ i θ nazywają się *kątami analitycznymi*. Są one dodatnie, gdy dodatniemu przyrostowi *x* lub *y* odpowiada dodatni przyrost *z*, jak na Rys. 6. A zatem, kąt przegłębienia θ > 0



Rys. 6. Kąty analityczne i kąty Eulera wodnicy dowolnie nachylonej

jest dodatni, gdy statek jest przegłębiony na dziób, zaś kąt φ > 0 jest dodatni, gdy przechylony jest na lewą burtę (na Rys. 3, 4 i 5 statek jest przechylony na prawą burtę, kąty przechyłu są więc ujemne na tych rysunkach). Obydwa kąty są łatwe do pomiaru, gdyż $\mathrm{tg}\theta = t/L_{pp}$, a $\mathrm{tg}\varphi = \Delta T_{LP}/B$, gdzie $t \equiv \Delta T_{DR}$ jest przegłębieniem, czyli różnicą zanurzeń na pionie dziobowym i rufowym, ΔT_{LP} jest różnicą zanurzeń na lewej i prawej burcie na owrężu. Zwróćmy uwagę, że w kategoriach obrotu wodnicy względem statku, przechył ma znak *zgodny*, a przegłębienie *przeciwny* do obrotu wodnicy. W przypadku obrotu statku jest na odwrót.

Wodnica, pokazana na Rys. 6, tworzy z płaszczyznami układu czworościan prostokątny o wysokości T_0, jak na Rys. 7, ograniczony śladami wody, przez które rozumie się krawędzie przenikania się tych płaszczyzn z powierzchnią morza. Kąty θ i ϑ nachylenia śladów wody w PS i PP względem osi x są kątami przegłębienia, w zależności od doboru linii węzłów (kąt Θ nie jest zaznaczony na rysunku).



Rys. 7. Czworościan

Z geometrii analitycznej wiadomo, że wektor normalny do wodnicy o równaniu (1) ma składowe: $\boldsymbol{R} = (\mathrm{tg}\,\theta,\ \mathrm{tg}\,\varphi,\ -1)$. Wektor ten, skierowany w dół, ma moduł

$$R = (1 + \mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{tg}^2\varphi)^{1/2}$$

Stąd, wersor $\boldsymbol{n}$ normalny do wodnicy, skierowany do góry, ma postać $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{R}/R$.

Kąt między płaszczyznami jest taki sam, jak kąt między wersorami normalnymi do nich. Stąd, kąt α między wodnicą a PP, czy wodnicą pierwotną, dany jest wzorem: $\cos\alpha = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}$, zatem, $\cos\alpha = 1/R = 1/(1 + \mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{tg}^2\varphi)^{1/2}$. Tak więc,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = (\mathrm{tg}^2\theta + \mathrm{tg}^2\varphi)^{1/2} \tag{2}$$

Znak kąta α jest taki sam, jak kąta φ. Uwzględniając, że $1/R = \cos\alpha$, składowe wersora $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{R}/R$ są następujące:

$$\boldsymbol{n} = (-\mathrm{tg}\,\theta\cos\alpha,\ -\mathrm{tg}\,\varphi\cos\alpha,\ \cos\alpha) \tag{3}$$

Podobnie znajduje się kąt nachylenia zwierciadła wody względem PS, jako kąt między wersorami $\boldsymbol{n}$ i $-\boldsymbol{j}$, zatem, $\cos\delta = -\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n} = -n_y$. Oznaczając je przez δ, mamy: $\cos\delta = \mathrm{tg}\,\varphi\cos\alpha$.

Kąt przegłębienia związany z osią Ox, czyli kąt Θ, jest równy kątowi nachylenia osi Ox względem powierzchni morza. Zatem, $\cos(90° + \Theta) = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{n} = n_x$. Stąd, $\sin\Theta = \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\theta$, co daje:

$$\mathrm{tg}\,\Theta = \cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta \tag{4}$$

Kąt przechyłu związany ze śladem wody w PS, oznaczany przez ϕ, równy jest kątowi nachylenia osi Oy względem zwierciadła wody, zatem, $\cos(90° + \phi) = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n} = n_y$. Tak więc, $\sin\phi = -n_y = \mathrm{tg}\,\varphi\cos\alpha$, lub prościej

$$\operatorname{tg}\phi = \cos\theta \operatorname{tg}\varphi \tag{5}$$

Widzimy, że $\cos\delta$ i $\sin\phi$ są sobie równe. Wynika stąd, że kąt nachylenia zwierciadła wody względem PS jest dopełnieniem kąta ϕ do kąta prostego, tj. $\delta = 90° - \phi$.

Warto zauważyć, że kąt $\phi \le \alpha$, co bezpośrednio widać ze wzoru na $\cos\alpha = \cos\theta\cos\phi$, który otrzymuje się dzieląc $\sin\phi$ przez $\operatorname{tg}\phi$. Ze wzoru (5) wynika ponadto, że $\phi \le \varphi$. Tak więc, kąt obrotu ϕ nigdy nie jest większy ani od kąta α, ani od kąta φ. Uwzględniając jednak, że pionowy kąt przegłębienia Θ nawet dla największych przegłębień jest poniżej 1°, różnice między kątami przechyłu ϕ, φ i α są niezauważalne.

Kąt nachylenia śladu wody w PP względem osi *Ox*, oznaczony przez ϑ, jest współczynnikiem kierunkowym prostej w płaszczyźnie *z* = *const*. Z równania (1) natychmiast wynika, że:

$$\operatorname{tg}\vartheta = -\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\varphi \tag{6}$$

W położeniu wyprostowanym, dla $\varphi = 0$, wzór (6) jest nieokreślony. W takim przypadku $\vartheta = 0$. Równoważne postacie wzoru (6) są następujące: $\sin\vartheta = -\operatorname{tg}\theta/\operatorname{tg}\alpha$, $\cos\vartheta = \operatorname{tg}\varphi/\operatorname{tg}\alpha$.

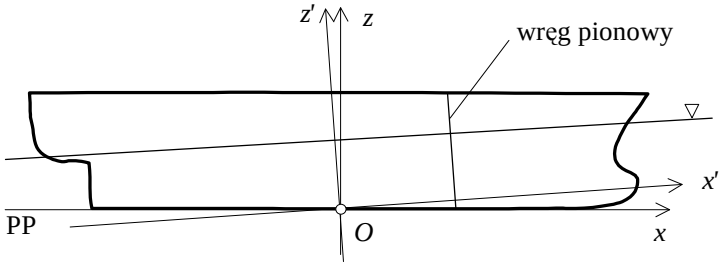
Warto zwrócić uwagę, że ślady wody w PS i w płaszczyźnie wręgowej, widoczne na Rys. 6 i Rys. 7, nie są w dowolnym przypadku prostopadłe do siebie. Kąt między nimi można łatwo wyznaczyć za pomocą wersorów obydwu śladów $\boldsymbol{e}_1$ i $\boldsymbol{e}_2$ (Rys. 7); ich zwroty są zgodne ze zwrotem osi *x* i *y*. Oznaczając kąt między wersorami przez β, mamy $\cos\beta = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2$, gdzie wersor śladu w PS $\boldsymbol{e}_1 = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$, zaś wersor śladów wody w płaszczyznach wręgowych $\boldsymbol{e}_2 = (0, \cos\varphi, \sin\varphi)$. Tak więc,

$$\cos\beta = \sin\theta\sin\varphi \tag{7}$$

Gdy obydwa kąty analityczne są jednakowego znaku, kąt między wersorami jest ostry (co widać też z Rys. 6 i 7); w przeciwnym przypadku, jest rozwarty.

a) Wpływ wstępnego przegłębienia

Gdy w położeniu wyprostowanym statek ma przegłębienie θ_0, kąty Eulera związane są z układem *Ox'yz'*, jak na Rys. 8. Oś *Ox'* jest pozioma, czyli równoległa do powierzchni morza, a oś *Oz'* jest pionowa, czyli prostopadła do powierzchni morza. Przegłębienie wstępne nie zmienia osi *Oy*, tym samym nie zmienia kątów Eulera, związanych z tą osią. Zmienią się natomiast kąty Eulera związane z dwoma pozostałymi osiami. Jak poprzednio, chcemy je wyrazić w kategoriach kątów analitycznych φ i θ.



Rys. 8. Układ współrzędnych statku przegłębionego

Płaszczyzną referencyjną dla osi *Ox'* jest wręg pionowy, sztywno związany ze statkiem, odchylony od przekrojów wręgowych o kąt θ_0 (Rys. 8); kąt $\theta_0 > 0$ jest dodatni, gdy przegłębienie jest na dziób. Kąt przegłębienia Θ', związany z osią *Ox'*, równy jest kątowi nachylenia osi *Ox'* względem zwierciadła wody. Zatem, $\cos(90° + \Theta') = \boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{n}$, gdzie $\boldsymbol{i}' = (\cos\theta_0, 0, \sin\theta_0)$ jest wersorem osi *Ox'*. Tak więc, $\sin\Theta' = -\boldsymbol{i}' \cdot \boldsymbol{n}$, stąd:

$$\sin\Theta' = (\mathrm{tg}\,\theta\cos\theta_0 - \sin\theta_0)\cos\alpha \tag{8}$$

Gdy $\theta_0 = 0$, wzór redukuje się do wzoru (4).

Kąt przechyłu φ' równa się kątowi między śladem wody i śladem wodnicy pierwotnej w płaszczyźnie referencyjnej (wręgu pionowym). Wersor śladu wody $\boldsymbol{e}_2'$ na wręgu pionowym równy jest $\boldsymbol{e}_2' = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{i}')/\sin(90° + \Theta')$, zaś wersor śladu wodnicy pierwotnej na wręgu pionowym jest tożsamy z wersorem $\boldsymbol{j}$ osi *Oy*. Zatem, $\cos\varphi' = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{e}_2'$, gdzie

$$\boldsymbol{e}_2' = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{i}')/\cos\Theta' \tag{9}$$

stąd:

$$\cos\varphi' = (\cos\theta_0 + \sin\theta_0\,\mathrm{tg}\,\theta)\cos\alpha/\cos\Theta' \tag{10}$$

Gdy $\theta_0 \to 0$, $\varphi' \to \varphi$, gdyż $\cos\varphi' = \cos\alpha/\cos\Theta$. Uwzględniając, że $\cos\Theta = \cos\alpha/\cos\varphi$, daje to w granicy $\cos\varphi' = \cos\varphi$, czyli $\varphi' = \varphi$.

W przypadku osi *Oz'* płaszczyzną referencyjną jest dowolna płaszczyzna równoległa do wodnicy statku w położeniu wyprostowanym, sztywno z nim związana. Jej wersor normalny $\boldsymbol{k}' = (-\sin\theta_0,\ 0,\ \cos\theta_0)$ jest tożsamy z wersorem osi *Oz'*. Kąt przechyłu α' określa równanie: $\cos\alpha' = \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{n}$, stąd:

$$\cos\alpha' = (1 + \mathrm{tg}\,\theta_0\,\mathrm{tg}\,\theta)\cos\theta_0\cos\alpha \tag{11}$$

Kąt przegłębienia ϑ' (kąt skręcenia) jest kątem pomiędzy śladem wody i śladem PS w płaszczyźnie referencyjnej (wodnicy pierwotnej). Wersory tych śladów są następujące: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{n}/\sin\alpha'$ oraz $\boldsymbol{i}'$. Kąt skręcenia określa równanie $\cos\vartheta' = \boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{w}$, stąd:

$$\cos\vartheta' = \boldsymbol{i}'\cdot(\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{n})/\sin\alpha' = -n_y/\sin\alpha' = \mathrm{tg}\,\varphi\cos\alpha/\sin\alpha' \tag{12}$$

Znak kąta ϑ' jest przeciwny do znaku kąta θ, co widać ze wzoru (6), czyli jest ujemny, gdy przegłębienie jest na dziób. Gdy $\theta_0 = 0$, to $\alpha' = \alpha$, zaś $\vartheta' = \vartheta$, co łatwo pokazać. Zmiana kąta przegłębienia ϑ' nie wpływa na kąt przechyłu α', czego nie widać na pierwszy rzut oka. Zasada ta ma zastosowanie dla każdej osi referencyjnej.

b) Płaszczyzna naporu wiatru

Rozpatrzymy teraz kąty związane z *płaszczyzną naporu wiatru*, odchylonej od PS o kąt ψ, zwany *azymutem*; przy czym $\psi > 0$, gdy odchylenie jest przeciwne do wskazówek zegara. Z płaszczyzną tą związany jest układ *Ox''y'z'*, obrócony o kąt ψ wokół osi *Oz'* względem układu *Ox'yz'*. Z założenia, ustawiona jest ona prostopadle do kierunku wiatru. Gdy $\psi = 0$ płaszczyzna naporu wiatru pokrywa się z PS.

Wersory $\boldsymbol{i}''$ i $\boldsymbol{j}'$ układu *Ox''y'z'* obrócone są o kąt ψ względem wersorów $\boldsymbol{i}'$ i $\boldsymbol{j}$. Zatem, biorąc rzuty na osie układu, otrzymamy:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{i}'' &= \boldsymbol{i}'\cos\psi + \boldsymbol{j}\sin\psi = (\cos\theta_0\cos\psi,\ \sin\psi,\ \sin\theta_0\cos\psi)\\ \boldsymbol{j}' &= -\boldsymbol{i}'\sin\psi + \boldsymbol{j}\cos\psi = (-\cos\theta_0\sin\psi,\ \cos\psi,\ -\sin\theta_0\sin\psi)\end{aligned} \tag{13}$$

W przypadku osi referencyjnej *x''*, końcowe położenie obiektu znajdziemy przechylając wpierw o kąt φ' wokół osi *Ox''*, opisanej wersorem $\boldsymbol{i}''$, a następnie przegłębiając o kąt Θ' wokół śladu wody w płaszczyźnie prostopadłej do osi *Ox''*, opisanej wersorem $\boldsymbol{e}_2'$. W wyniku pierwszego obrotu otrzymamy wersory $\boldsymbol{e}_2'$ i $\boldsymbol{k}''$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_2' &= \boldsymbol{j}'\cos\varphi' + \boldsymbol{k}'\sin\varphi'\\ \boldsymbol{k}'' &= \boldsymbol{k}'\cos\varphi' - \boldsymbol{j}'\sin\varphi'\end{aligned} \tag{14}$$

Drugi obrót wokół $\boldsymbol{e}_2'$ da nam wersor $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}''\cos\Theta' - \boldsymbol{i}''\sin\Theta' \tag{15}$$

gdzie wersory $\boldsymbol{i}''$ i $\boldsymbol{j}'$ dane są wzorami (13). Kąty φ' i Θ' są kątami Eulera, związanymi z osią referencyjną Ox'', ten ostatni wynika z warunku zrównoważenia wzdłużnego.

W przypadku osi referencyjnej Oy', normalnej do płaszczyzny naporu wiatru, grającej rolę płaszczyzny referencyjnej, linią węzłów jest ślad wody w płaszczyźnie naporu wiatru $\boldsymbol{e}_1'$. Ślad ten jest jednocześnie osią obrotu, związaną z osią referencyjną Oy'. Wersor $\boldsymbol{e}_1'$ wynika z przegłębienia statku o kąt θ' względem osi Ox''. Inaczej mówiąc, obracając wersory $\boldsymbol{i}''$ i $\boldsymbol{k}'$ o kąt θ' wokół osi Oy' wersor $\boldsymbol{i}''$ przejdzie w wersor $\boldsymbol{e}_1'$, a wersor $\boldsymbol{k}'$ w wersor $\boldsymbol{k}''$, zatem:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1' &= \boldsymbol{i}''\cos\theta' + \boldsymbol{k}'\sin\theta' \\ \boldsymbol{k}'' &= \boldsymbol{k}'\cos\theta' - \boldsymbol{i}''\sin\theta' \end{aligned} \tag{16}$$

Wreszcie, wersor $\boldsymbol{n}$ wynika z obrotu statku (wodnicy) wokół śladu wody w płaszczyźnie naporu wiatru $\boldsymbol{e}_1'$ o kąt przechyłu ϕ', tj. kąt nachylenia osi y' względem poziomu, zatem:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}''\cos\phi' - \boldsymbol{j}'\sin\phi' \tag{17}$$

Kąty θ' i ϕ' są kątami Eulera, związanymi z osią referencyjną Oy'; ten pierwszy wynika z warunku wzdłużnego zrównoważenia. Gdy $\psi = \theta_0 = 0$, wzór (17) redukuje się do wzoru (55).

W przypadku osi referencyjnej Oz', linią węzłów jest *zadany* ślad wody na wodnicy pierwotnej, grającej rolę płaszczyzny referencyjnej; wersor tego śladu oznaczymy przez $\boldsymbol{w}$. W położeniu wyprostowanym, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{i}'$. Wersor ten jest jednocześnie osią obrotu $\boldsymbol{e}$, związaną z tą osią referencyjną, oczywiście, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{n}/\sin\alpha'$. Wydawałoby się, że ze wzoru tego nie możemy korzystać, gdyż wersor $\boldsymbol{n}$ jest tu zadany, a wersor $\boldsymbol{w}$ jest wynikowy, a powinno być na odwrót.

Zauważmy, że w przypadku osi referencyjnych Ox'' czy Oy', azymut nie zmienia się podczas równoważenia statku. Inaczej jest w przypadku osi referencyjnej Oz', kąt przegłębienia ϑ', tożsamy z azymutem (Rys. 6) zmienia się. W położeniu równowagi jest on taki sam, dla zadanego kąta przechyłu α', niezależnie od kierunku osi obrotu $\boldsymbol{e}$ (śladu $\boldsymbol{w}$) w położeniu wyprostowanym. Oś referencyjna Oz' nie jest więc związana ani z płaszczyzną naporu wiatru, ani z PS.

Tym niemniej, znajdźmy wersory $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{w}$ dla zadanych kątów Eulera α' i ϑ'. Przydadzą się one, gdy będziemy chcieli otrzymać charakterystyki stateczności statku niezrównoważonego. Wersor $\boldsymbol{n}$ wynika z obrotu statku (wodnicy) wokół śladu wody $\boldsymbol{w}$ na wodnicy pierwotnej o kąt przechyłu α', zaś wersor śladu wody $\boldsymbol{w}$ na wodnicy pierwotnej wynika z obrotu $\boldsymbol{w}$ wokół wersora $\boldsymbol{k}'$ o kąt przegłębienia (skrętu) ϑ' (Rys. 2). Dany są one wzorami na obrót wektora o zadany kąt w odpowiedniej bazie wersorów:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{k}'\cos\alpha' + (\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{k}')\sin\alpha' \\ \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{i}''\cos\vartheta' + \boldsymbol{j}'\sin\vartheta' \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie wersory $\boldsymbol{i}''$ oraz $\boldsymbol{j}'$ dane są wzorami (13), α' jest kątem przechyłu, tj. kątem nachylenia wodnicy pierwotnej względem poziomu, zaś ϑ' jest kątem przegłębienia (skręcenia) mierzonym w płaszczyźnie pierwotnej, liczonym od kierunku $\boldsymbol{i}''$ (gdy $\vartheta' > 0$, przegłębienie jest na rufę); są to kąty Eulera, związane z osią Oz'. Kąt ϑ' wynika z warunku zrównoważenia wzdłużnego. Znajomość wersora $\boldsymbol{n}$ wyznacza kąty analityczne, potrzebne do obliczenia charakterystyk geometrycznych wodnicy i kadłuba statku.

Wersor śladu wody na wodnicy pierwotnej $\boldsymbol{w}$ obrócony jest względem wersora $\boldsymbol{i}'$ o kąt $\Psi = \psi + \vartheta'$, równy sumie kąta azymutu i skrętu. Stąd, obydwa wersory we wzorze (18) można wyrazić prościej w bazie układu $Ox'yz'$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n} &= \boldsymbol{i}'\sin\alpha'\sin\Psi - \boldsymbol{j}\sin\alpha'\cos\Psi + \boldsymbol{k}'\cos\alpha' \\ \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{i}'\cos\Psi + \boldsymbol{j}\sin\Psi \end{aligned} \tag{19}$$

Z uwagi na to, że obrót wersora $\boldsymbol{w}$ o kąt Ψ względem $\boldsymbol{i}'$ może odbywać się w *poziomej* wodnicy pierwotnej *przed* przechyłem, van Santen w swoich pracach [20, 21] nazywa ten obrót *skręceniem* (*ang*. twist), bez wyraźnego wskazania, że jest to jeden z dwóch kątów Eulera, związany z przegłębieniem, mierzony w płaszczyźnie wodnicy pierwotnej *po* przechyle (Rys. 5).

Ze wzorów (18) i (19) wynikają następujące tożsamości: $\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{n} = \cos\alpha'$, $\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{n} = \boldsymbol{w}\sin\alpha'$, $\boldsymbol{i}'\cdot\boldsymbol{w} = \cos\Psi$, $\boldsymbol{i}'\times\boldsymbol{w} = \boldsymbol{k}'\sin\Psi$. Gdy $\psi = 0$, $\Psi = \vartheta'$. Dla statku przegłębionego w pozycji wyprostowanej, z równania (18) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= (\cos\vartheta', \sin\vartheta', 0) \\ \boldsymbol{n} &= (\sin\vartheta'\sin\alpha', -\cos\vartheta'\sin\alpha', \cos\alpha') \end{aligned} \tag{20}$$

Dla statku na równej stępce, kąty α' i ϑ' zastępujemy kątami α i ϑ. Wersor $\boldsymbol{n}$ jest wówczas identyczny ze wzorem (54).

Zmiana orientacji obiektu w płaszczyźnie morza wprowadza trzeci kąt Eulera – azymut ψ. Ze wzorów (19) wynika jednak, że przynajmniej w przypadku osi Oz' wersor $\boldsymbol{n}$, opisujący położenie statku względem lustra wody zależy od dwóch kątów Eulera: kąta przechyłu α' i skręcenia (azymutu) $\Psi = \psi + \vartheta'$. W przypadku pozostałych osi referencyjnych, sytuacja jest bardziej skomplikowana – wersor $\boldsymbol{n}$ zależy od trzech kątów Eulera, a nie od dwóch. Oznacza to, że w tych przypadkach związek między kątami Eulera (przechył i przegłębienie) i kątami analitycznymi φ i θ zależy dodatkowo od azymutu ψ.

4.2. Ramię prostujące

Płaszczyzna obrotu, w której równoważymy statek, jest zdefiniowana wersorem $\boldsymbol{e}$. Wersor ten jest stały w przestrzeni, prostopadły lub równoległy do linii węzłów, w zależności od osi referencyjnej. Gdy linią węzłów jest ślad wody na owrężu (Rys. 3), oś obrotu

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{n} \tag{21}$$

gdzie $\boldsymbol{e}_2 = (0, \cos\varphi, \sin\varphi)$ jest wersorem śladu wody na owrężu. Gdy statek ma przegłębienie wstępne, wersor $\boldsymbol{e}_2$ zastępujemy wersorem $\boldsymbol{e}_2'$, danym wzorem (9), a gdy azymut $\psi \neq 0$, wersorem $\boldsymbol{e}_2'$, danym wzorem (14). Gdy linią węzłów jest ślad wody w PS (Rys. 4), oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1$, gdzie $\boldsymbol{e}_1 = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$ jest wersorem śladu wody w PS, a gdy linią węzłów jest ślad wody w płaszczyźnie naporu wiatru, oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1'$, gdzie wersor $\boldsymbol{e}_1'$ dany jest wzorem (16). Gdy linią węzłów jest ślad wody na wodnicy pierwotnej $\boldsymbol{w}$ (Rys. 5) oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{w}$, gdzie wersor $\boldsymbol{w}$ dany jest wzorem (18), ważnym zarówno dla statku na równej stępce, przegłębionego, czy obróconego o pewien azymut ψ.

Osie obrotu mają różne kierunki, gdy w trakcie przechylania zmienia się przegłębienie statku. Przykładowo, oś obrotu $\boldsymbol{e}$, dana wzorem (21), związana z osią referencyjną Ox, odchylona jest od śladu wody w PS o kąt $\gamma_1 = \beta - 90°$, gdzie β jest kątem między śladami wody na owrężu i w PS, danym wzorem (7). Z kolei, oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}/\sin\alpha$, związana z osią referencyjną Oz, odchylona jest od śladu wody w PS o kąt γ_3, który znajdziemy z równania: $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e} = \sin\gamma_3\boldsymbol{n}$, stąd, $\sin\gamma_3 = -\sin\theta/\sin\alpha$. Jak widać, osie obrotu pokrywają się ze sobą, gdy nie ma przegłębienia.

Płaszczyzna obrotu obraca się wokół osi obrotu $\boldsymbol{e}$, natomiast wodnica, czyli statek, obraca się wokół chwilowej *osi pływania* $\boldsymbol{f}$, odchylonej od osi obrotu $\boldsymbol{e}$ o pewien kąt χ, zależny od osi $\boldsymbol{e}$. Przez oś pływania rozumie się krawędź przecięcia się dwóch wodnic, nachylonych względem siebie pod nieskończenie małym kątem. W przypadku wodnic równoobjętościowych przechodzi ona przez *środek pływania C*, tj. środek ciężkości wodnicy. Wynika to z twierdzenia Pappusa–Guldina, znanego w teorii okrętu jako twierdzenie Eulera o wodnicach równoobjętościowych. Twierdzenie to nie mówi nic o orientacji osi pływania $\boldsymbol{f}$, o czym będzie mowa niżej. W mechanice, oś pływania nazywa się *chwilową osią obrotu*. Do wyznaczenia osi pływania potrzebna jest znajomość momentów bezwładności wodnicy, co w przypadku statku swobodnie pływającego nie jest zadaniem trywialnym.

W trakcie przechylania statku, wyporność pozostaje stała, a środek wyporu przemieszcza się w płaszczyźnie obrotu, prostopadłej do osi obrotu $\boldsymbol{e}$. Musi więc spełniać równanie płaszczyzny obrotu: $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} = 0$, gdzie $\boldsymbol{r} \equiv \boldsymbol{GF} = (x_F - x_G, y_F - y_G, z_F - z_G)$ jest promieniem wodzącym środka wyporu względem środka ciężkości statku. Gdy środek wyporu znajduje się w płaszczyźnie obrotu mówimy, że statek jest *wzdłużnie zrównoważony*. Wielkość $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} \equiv l_e$ jest wzdłużną składową ramienia prostującego, równą odległości środka wyporu od płaszczyzny obrotu (gdy $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} > 0$, jest on przed płaszczyzną obrotu). Dla zadanej wyporności $V = const$ i zadanego kąta obrotu płaszczyzny obrotu $\eta = const$, składowa wzdłużna ramienia $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}$ jest funkcją przegłębienia.

Moment prostujący dany jest wzorem $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}D$, gdzie $D = \rho g V$ jest wyporem statku. Wektor ten równoległy jest do osi obrotu $\boldsymbol{e}$, stąd $M = \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n})D$. Ramię prostujące $l = M/D$ dane jest zatem wzorem:

$$l = \boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}) \tag{22}$$

Jest ono funkcją kąta obrotu η płaszczyzny obrotu, zależnego od osi referencyjnej. Jak widać, podstawą znalezienia krzywej ramion statku swobodnie pływającego jest znajomość współrzędnych środka wyporu F, osi obrotu $\boldsymbol{e}$, zależnej od osi referencyjnej, i wersora $\boldsymbol{n}$, prostopadłego do wodnicy. W przypadku osi referencyjnej Oz' wynikiem obliczeń jest krzywa ramion o najmniejszych wartościach, zwana *krzywą minimalnej stateczności*, wprowadzona przez Siemionowa-Tiań-Szańskiego w publikacji [22].

4.3. Obliczanie momentów bezwładności

Dany jest kadłub statku, opisany w układzie $Oxyz$. Dokonujemy jego przekroju za pomocą dowolnej płaszczyzny. W okrętownictwie, płaszczyzną tą jest płaszczyzna morza, a sam przekrój jest wodnicą pływania, dowolnie nachyloną względem statku. Chcemy znaleźć momenty bezwładności otrzymanego przekroju. Można je wyznaczyć *pośrednio*, posługując się momentami bezwładności rzutu wodnicy na jedną z płaszczyzn układu (PP lub PS), omówione w pozycji [22], lub *bezpośrednio*, obliczając charakterystyki przekroju za pomocą śladów wodnicy w płaszczyznach wręgowych, jak w pracy [6].

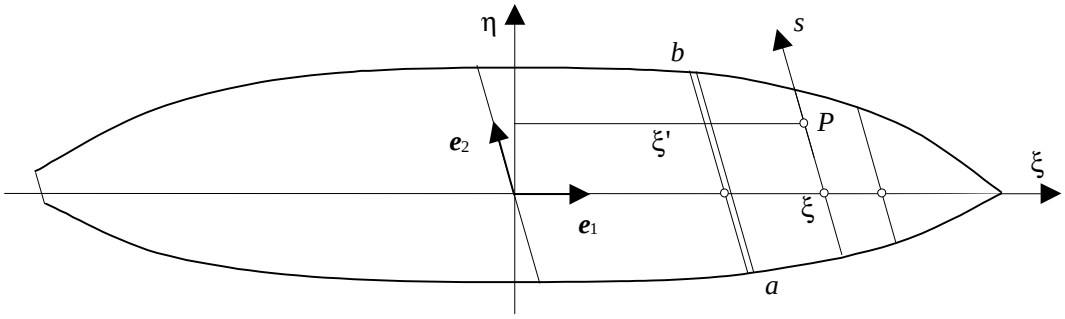
Momenty bezwładności wyznaczymy metodą bezpośrednią, wykonując obliczenia w układzie wodnicy $\xi\eta$ (Rys. 9). Oś ξ pokrywa się ze śladem wody w PS, oś η jest prostopadła do wersorów $\boldsymbol{n}$ i $\boldsymbol{e}_1$. Początek układu znajduje się w punkcie przecięcia się osi z ze śladem wody w PS. Ślady wodnicy na wręgach, tj. szerokości wręgów na wodnicy są ukośne do osi ξ (śladu wody w PS); część z nich pokazana jest na Rys. 9. Kąt między wersorami śladów równy jest β. Oś ξ dzieli ślad na dwa odcinki o długościach a i b; można je zmierzyć bezpośrednio na owrężeniu statku. Wielkości a i b mają charakter współrzędnych końca śladów, mierzonych wzdłuż śladu. Współrzędne te są dodatnie, gdy leżą na lewo od osi ξ, zaś ujemne, gdy leżą na prawo (Rys. 9).

Uwzględniając, że pomiędzy współrzędnymi ukośnymi (ξ, s) punktu P i współrzędnymi prostokątnymi (ξ', η) zachodzą związki:

$$\xi' = \xi - s\sin(\beta - 90°) = \xi + s\cos\beta$$
$$\eta = s\cos(\beta - 90°) = s\sin\beta$$

łatwo znaleźć element pola δA paska wodnicy o szerokości $d\xi$ oraz jego momenty statyczne i bezwładności w kategoriach współrzędnych ukośnych (ξ, s). Wielkości te są równe:

$$\delta A = d\xi d\eta = d\xi ds\sin\beta$$
$$\delta M_\xi = \eta\delta A = d\xi sds\sin^2\beta$$
$$\delta M_\eta = \xi'\delta A = \xi d\xi ds\sin\beta + d\xi sds\sin\beta\cos\beta$$
$$\delta D = \xi'\eta\delta A = \xi d\xi sds\sin^2\beta + d\xi s^2 ds\sin^2\beta\cos\beta$$
$$\delta J_\xi = \eta^2\delta A = d\xi s^2 ds\sin^3\beta$$
$$\delta J_\eta = \xi'^2\delta A = \xi^2 d\xi ds\sin\beta + \xi d\xi sds\sin 2\beta + d\xi s^2 ds\cos^2\beta\sin\beta$$



Rys. 9. Kład wodnicy

Charakterystyki geometryczne paska wodnicy znajdziemy całkując elementarne wielkości wzdłuż paska. Otrzymamy następujące wzory:

$$dA = \int\delta A = \sin\beta\, d\xi\int ds = \sin\beta\, d\xi\, s|_a^b = \sin\beta\,(b-a)d\xi$$
$$dM_\xi = \int\delta M_\xi = \sin^2\beta\, d\xi\int sds = \sin^2\beta\, d\xi\,½s^2|_a^b = \sin^2\beta\,½(b^2-a^2)d\xi$$
$$dM_\eta = \int\delta M_\eta = \xi d\xi\sin\beta\int ds + d\xi\sin\beta\cos\beta\int sds =$$
$$= \sin\beta(b-a)\xi d\xi + \sin 2\beta\,¼(b^2-a^2)d\xi$$
$$dJ_\xi = \int\delta J_\xi = d\xi\sin^3\beta\int s^2 ds. = \sin^3\beta\,⅓(b^3-a^3)d\xi$$
$$dJ_\eta = \int\delta J_\eta = \xi^2 d\xi\sin\beta\int ds + \xi d\xi\sin 2\beta\int sds + d\xi\int s^2 ds\cos^2\beta\sin\beta =$$
$$= \sin\beta\,(b-a)\xi^2 d\xi + \sin 2\beta\,½(b^2-a^2)\xi d\xi + \cos^2\beta\sin\beta\,⅓(b^3-a^3)d\xi$$
$$dD = \int\delta D = \xi d\xi\sin^2\beta\int sds + d\xi\sin^2\beta\cos\beta\int s^2 ds =$$
$$= \sin^2\beta\,½(b^2-a^2)\xi d\xi + \sin^2\beta\cos\beta\,⅓(b^3-a^3)d\xi$$

Całkując wzdłuż osi ξ oraz uwzględniając, że $x = \xi\cos\theta$ (oś ξ jest nachylona względem osi x pod kątem θ), otrzymamy charakterystyki geometryczne wodnicy:

$$A = \int dA = \sin\beta\int(b-a)d\xi = \sin\beta\int(b-a)dx/\cos\theta$$
$$M_\xi = \int dM_\xi = \sin^2\beta\int ½(b^2-a^2)d\xi = \sin^2\beta\int ½(b^2-a^2)dx/\cos\theta$$
$$M_\eta = \int dM_\eta = \sin\beta\int(b-a)\xi d\xi + \sin 2\beta\int ¼(b^2-a^2)d\xi =$$
$$= \sin\beta\int(b-a)xdx/\cos^2\theta + \sin 2\beta\int ¼(b^2-a^2)dx/\cos\theta$$
$$D = \int dD = \sin^2\beta\int ½(b^2-a^2)\xi d\xi + \sin^2\beta\cos\beta\int ⅓(b^3-a^3)d\xi =$$
$$= \sin^2\beta\int ½(b^2-a^2)xdx/\cos^2\theta + \sin^2\beta\cos\beta\int ⅓(b^3-a^3)dx/\cos\theta$$

$$
\begin{aligned}
J_\xi &= \int dJ_\xi = \sin^3\beta \int \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)\,d\xi = \sin^3\beta \int \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)\,dx/\cos\theta \\
J_\eta &= \int dJ_\eta = \sin\beta \int (b - a)\xi^2 d\xi + \sin 2\beta \int \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\xi d\xi + \\
&\quad + \cos^2\beta \sin\beta \int \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)\,d\xi = \\
&= \sin\beta \int (b - a)x^2 dx/\cos^3\theta + \sin 2\beta \int \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)x\,dx/\cos^2\theta + \\
&\quad + \cos^2\beta \sin\beta \int \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)\,dx/\cos\theta
\end{aligned}
$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int (b - a)\,dx, & J_{11} &= \int (b - a)x\,dx \\
I_2 &= \int \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\,dx, & J_{12} &= \int \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)x\,dx \\
I_3 &= \int \tfrac{1}{3}(b^3 - a^3)\,dx, & J_{21} &= \int (b - a)x^2 dx
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

przy czym, w ogólności $I_n \equiv J_{0n}$, otrzymamy ostatecznie następujące wyrażenia:

$$
\begin{aligned}
A &= I_1 \sin\beta/\cos\theta \\
M_\xi &= I_2 \sin^2\beta/\cos\theta \\
M_\eta &= J_{11} \sin\beta/\cos^2\theta + \tfrac{1}{2} I_2 \sin 2\beta/\cos\theta \\
D &= J_{12} \sin^2\beta/\cos^2\theta + I_3 \sin^2\beta \cos\beta/\cos\theta \\
J_\xi &= I_3 \sin^3\beta/\cos\theta \\
J_\eta &= J_{21} \sin\beta/\cos^3\theta + J_{12} \sin 2\beta/\cos^2\theta + I_3 \cos^2\beta \sin\beta/\cos\theta
\end{aligned}
$$

Współrzędne środka ciężkości wodnicy wynoszą:

$$
\xi_C = M_\eta/A, \qquad \eta_C = M_\xi/A
$$

zaś centralne momenty bezwładności w układzie $\xi'\eta'$, przesuniętym równolegle do środka ciężkości wodnicy (tj. środka pływania), określone są wzorami Steinera:

$$
\begin{aligned}
J_{\xi'} &= J_\xi - A\eta_C{}^2 \\
J_{\eta'} &= J_\eta - A\xi_C{}^2 \\
D' &= D - A\xi_C\eta_C
\end{aligned}
\qquad (24)
$$

Główne momenty bezwładności znajdziemy obracając układ $\xi'\eta'$ o taki kąt γ, by moment dewiacyjny zerował się. Kąt ten określa wzór (patrz załącznik):

$$
\operatorname{tg} 2\gamma = -D'/a' \qquad (25)
$$

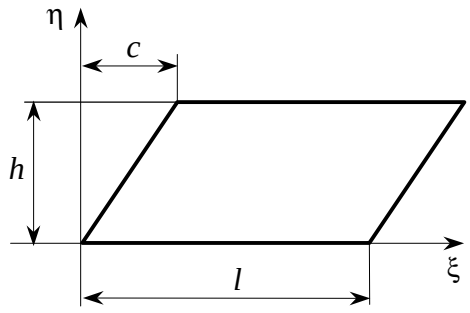
gdzie $a' = \tfrac{1}{2}(J_{\xi'} - J_{\eta'})$ jest promieniem przedziału bezwładności. Momenty bezwładności w układzie obróconym $\xi_1\eta_1$ nazywają się *głównymi momentami*, oznaczanymi przez $J_1 \equiv J_{\xi_1}$ oraz $J_2 \equiv J_{\eta_1}$, a osie układu $\xi_1\eta_1$ – głównymi osiami bezwładności. Momenty główne dane są wzorami:

$$
J_{2,1} = s \pm r \qquad (26)
$$

gdzie $s = \tfrac{1}{2}(J_{\xi'} + J_{\eta'})$ jest środkiem przedziału bezwładności (środkiem koła Mohra), zaś $r = (a'^2 + D'^2)^{1/2}$ jest promieniem tego koła.

Poprawność otrzymanych wzorów można sprawdzić na przykładzie równoległoboku, pokazanego na Rys. 10. Momenty bezwładności w układzie (ξ, η) wyrażają się wzorami:

$$
J_\xi = \tfrac{1}{3} l h^3, \; J_\eta = \tfrac{1}{3} h l^3 + \tfrac{1}{2} h l^2 c + \tfrac{1}{3} h l c^2, \; D = \tfrac{1}{4}(lh)^2 + \tfrac{1}{3} l h^2 c
$$



Rys. 10

Uwzględniając, że współrzędne środka ciężkości wynoszą: $\xi_c = \frac{1}{2}(l + c)$, $\eta_c = \frac{1}{2}h$, ze wzorów Steinera otrzymamy momenty centralne: $J'_\xi = \frac{1}{12}lh^3$, $J'_y = \frac{1}{12}hl^3 + \frac{1}{12}hlc^2$, $D' = \frac{1}{12}lh^2c$, stąd, $a' = \frac{1}{2}(J'_\xi - J'_\eta) = \frac{1}{24}lh(h^2 - l^2 - c^2)$. Zatem, $\operatorname{tg} 2\gamma = -D'/a' = -2hc/(h^2 - b^2 - c^2)$.

W dalszych zastosowaniach potrzebna jest znajomość momentów centralnych w układzie ξ″η″, którego oś ξ″ jest równoległa do osi obrotu ***e***. Gdy osią referencyjną jest oś *y*, oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1$ jest równoległa do osi ξ, tj. śladu PS na wodnicy (Rys. 9). W przypadku osi referencyjnej *x*, oś obrotu ***e*** jest prostopadła do śladu wody na wręgach $\boldsymbol{e}_2$. Oś ξ″ jest zatem obrócona względem osi ξ o kąt β' = β – 90°. W wypadku osi referencyjnej *Oz'*, prostopadłej do wodnicy pierwotnej, oś obrotu ***e*** nachylona jest do osi ξ pod kątem β', danym wzorem: $\cos\beta' = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{e}_1$, gdzie ***w*** jest wersorem śladu wody na wodnicy pierwotnej. Można pokazać, że kąt β' > 0, gdy θ > θ_0. Momenty centralne w układzie ξ″η″, obróconym względem układu ξ'η' o kąt β' znajduje się z transformacji momentów (24) – patrz załącznik.

Gdy krawędź pokładu wejdzie do wody, oś ξ na Rys. 9 (ślad PS na wodnicy), dla dużych kątów przechyłu może znaleźć się poza obrysem wodnicy, wtedy współrzędne *s* obydwu końców śladu wody na wręgach mają ten sam znak. Nie ma to większego znaczenia dla obliczeń. Warto jednak wiedzieć, że oś ξ może definiować dowolna płaszczyzna wzdłużnicowa *y = const*, równoległa do PS, gdzie stała odpowiada np. środkowi rzutu śladu wody na owrężu na PP. Dobór osi ξ nie ma wpływu na centralne momenty bezwładności, a tym samym – na wartości główne tych momentów.

4.4. Promienie metacentryczne. Oś pływania

Dla statku swobodnie pływającego środek wyporu przemieszcza się wzdłuż pewnej krzywej w płaszczyźnie obrotu, która obraca się jak tarcza wokół osi obrotu ***e***, nieruchomej w przestrzeni (w układzie statku jest krzywą przestrzenną, ukośną do płaszczyzny obrotu). Ponieważ linie działania siły wyporu są zawsze pionowe, są więc prostopadłe do aktualnej wodnicy. Zmieniając przechył statku o *d*η, linia działania siły wyporu obróci się w płaszczyźnie obrotu o kąt *d*η, a odpowiadająca wodnica o kąt $d\alpha_1$ względem chwilowej osi pływania ***f***. Związek pomiędzy tymi różniczkami dany jest wzorem:

$$d\alpha_1 \cos\chi = d\eta \tag{27}$$

gdzie χ jest kątem definiującym orientację osi pływania względem osi obrotu ***e***. Wzór (27) odzwierciedla fakt, że małe kąty mają cechy wektorów. Stąd, kąt *d*η jest niczym innym jak rzutem kąta obrotu wodnicy $d\alpha_1$ na oś obrotu ***e***. W ogólnym przypadku kąt $d\alpha_1 \geq d\alpha$ jest nie mniejszy niż zmiana kąta nachylenia wodnicy *d*α względem PP; równość zachodzi, gdy oś pływania ***f*** jest równoległa do osi obrotu ***e***.

Promień metacentryczny $r_F \equiv FM$ rozumiany jest jako promień krzywizny krzywej środków wyporu w płaszczyźnie obrotu. Jest on funkcją kąta obrotu płaszczyzny obrotu η. Aby znaleźć wyrażenie na promień metacentryczny, musimy zastosować twierdzenie o przesuwaniu mas do klina powstałego przez obrót wodnicy wokół osi pływania ***f***. Ma ono następującą postać:

$$V ds = v|g_1 g_2|$$

gdzie *ds* jest przemieszczeniem środka wyporu wzdłuż krzywej środków wyporu, *V* jest wyporn ością objętościową kadłuba, g_1, g_2 są środkami ciężkości klina wynurzonego i zanurzonego,

v jest objętością klina, zaś $v|g_1g_2|$ jest momentem statycznym przemieszczenia objętości klina. Moment ten ma dwie składowe: poprzeczną $J_f d\alpha_1$ i podłużną $D_f d\alpha_1$, tak więc:

$$Vds = (J_f^{\,2} + D_f^{\,2})^{1/2} d\alpha_1$$

gdzie J_f i D_f to centralne momenty bezwładności wodnicy poprzeczny i dewiacyjny, związane z osią pływania $\boldsymbol{f}$. Wprowadzając oznaczenie: $J_s \equiv (J_f^{\,2} + D_f^{\,2})^{1/2}$, powyższa zależność przyjmie postać: $Vds = J_s d\alpha_1$. Z drugiej strony, element ds krzywej środków wyporu leży w płaszczyźnie obrotu, zatem możemy napisać: $Vds = J_T d\eta$, gdzie J_T ma znaczenie poprzecznego momentu bezwładności wodnicy statku swobodnie pływającego. Tak więc: $Vds = J_s d\alpha_1 = J_T d\eta$. Dzieląc stronami przez V, otrzymamy:

$$ds = r_s d\alpha_1 \equiv r_F d\eta$$

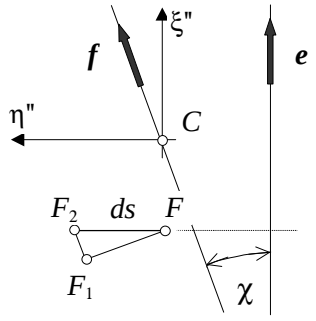
gdzie $r_s \equiv J_s/V$, zaś $r_F = J_T/V$ jest poprzecznym promieniem metacentrycznym. Uwzględniając wzór (27), promień metacentryczny wyrazi się wzorem:

$$r_F = r_s/\cos\chi \tag{28}$$

W odróżnieniu od ramienia prostującego l, promień metacentryczny r_F zależy bezpośrednio od orientacji osi pływania $\boldsymbol{f}$ względem osi obrotu $\boldsymbol{e}$. Znajomość osi pływania przyspiesza obliczenia. Promień metacentryczny r_F będziemy chcieli wyrazić w kategoriach charakterystyk geometrycznych wodnicy w układzie ξ"η", co zrobimy później.

Środek wyporu przemieszcza się w płaszczyźnie obrotu równolegle do chwilowej wodnicy (lustra wody). Wektor przemieszczenia wynosi $d\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e})\,ds$, gdzie $ds = r_F d\eta$.

Momenty centralne wodnicy względem osi pływania $\boldsymbol{f}$ dane są wzorami: $J_f = s + a_f$, gdzie $s = \frac{1}{2}(J_\xi'' + J_\eta'')$ jest środkiem przedziału bezwładności, zaś a_f jest promieniem przedziału bezwładności wodnicy po obrocie o kąt χ, przy czym



Rys. 11. Widok z góry na wodnicę pływania

$$\begin{aligned} D_f &= a''\sin 2\chi + D''\cos 2\chi \\ a_f &= a''\cos 2\chi - D''\sin 2\chi \end{aligned} \tag{29}$$

$a'' = \frac{1}{2}(J_\xi'' - J_\eta'')$ jest promieniem przedziału bezwładności przed obrotem (w układzie ξ"η"), zaś D'', J_ξ'', J_η'' to moment dewiacyjny, poprzeczny i wzdłużny moment bezwładności wodnicy w układzie centralnym ξ″η″, równoległym do osi obrotu $\boldsymbol{e}$ (Rys. 11). Wzory te wynikają z transformacji momentów bezwładności wodnicy, wywołanej obrotem układu centralnego ξ″η″ o kąt χ – patrz załącznik.

Obracając wodnicę o kąt $d\alpha_1$, poprzeczna składowa FF_1 przemieszczenia środka wyporu jest proporcjonalna do J_f, zaś podłużna składowa F_1F_2 – proporcjonalna do D_f. Chcemy, by to wypadkowe przemieszczenie było normalne do kierunku działania momentu przechylającego (osi obrotu $\boldsymbol{e}$). Aby tak było, kąt F na Rys. 11 musi równać się χ, co wynika z własności kątów o ramionach odpowiednio prostopadłych. Tak więc, kąt nachylenia osi pływania w stosunku do osi obrotu musi spełniać równanie:

$$\mathrm{tg}\chi = D_f/J_f \tag{30}$$

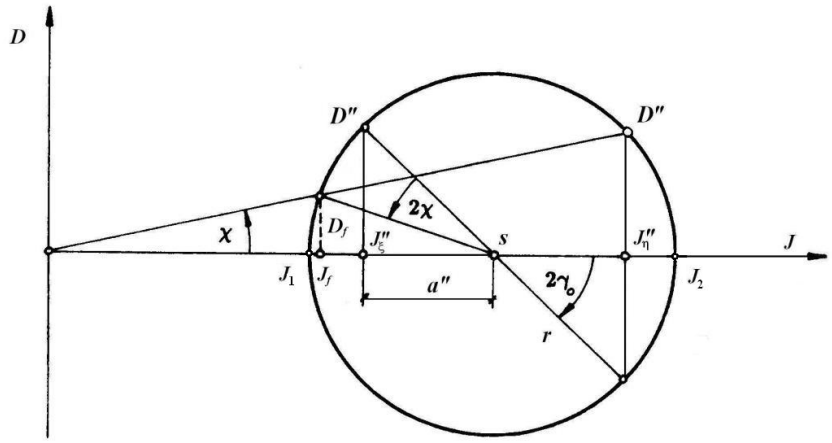
Kąt χ ma taki sam znak, co moment dewiacyjny wodnicy (na Rys. 11 jest dodatni). Należy pamiętać, że momenty D_f i J_f są same funkcjami kąta χ, co czyni ten wzór równaniem ze względu na nieznany kąt χ. Podstawiając $J_f = s + a_f$, równanie (30) przyjmie postać:

$$D_f - (s + a_f)\,\mathrm{tg}\chi = 0.$$

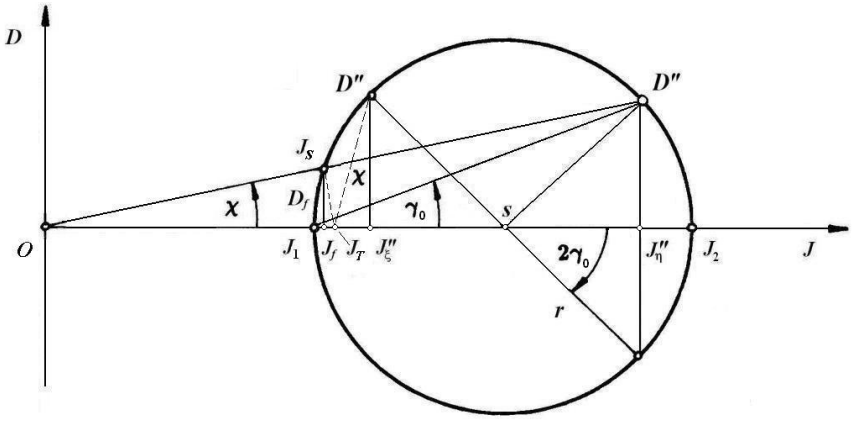
Wielkości D_f i a_f, dane wzorami (29), przedstawiają równanie parametryczne koła Mohra (Rys. 12). Stosując je w powyższym równaniu, otrzymamy:

$$r\sin(2\gamma + 2\chi) - [s + r\cos(2\gamma + 2\chi)]\,\mathrm{tg}\chi = 0 \tag{31}$$

gdzie $r = (a^2 + D^2)^{1/2}$ jest promieniem koła Mohra, niezależnym od orientacji układu centralnego, faza $2\gamma_0 = \mathrm{arctg}(D''/a'')$, $2\gamma = 2\gamma_0$, gdy $a'' > 0$, w przeciwnej sytuacji $2\gamma = 2\gamma_0 + 180^o$. Równanie (30), z użyciem wielkości D'' i a'' jest łatwiejsze do rozwiązania, a równanie (31) jest łatwiejsze do interpretacji geometrycznej (Rys. 12); a'' i γ_0 są ujemne na tym rysunku.



Rys. 12. Koło Mohra dla wodnicy



Rys. 13. Kierunek główny i poprzeczny momentu bezwładności wodnicy J_T

Wyrażając w równaniu (31) $\cos 2\chi$ i $\sin 2\chi$ za pomocą $\mathrm{tg}\chi$, zredukuje się ono do prostego równania pierwszego stopnia ze względu na $\mathrm{tg}\chi$: $D'' = (s - a'')\mathrm{tg}\chi$. Stąd mamy, że:

$$\mathrm{tg}\chi = D''/J_\eta'' \tag{32}$$

przy czym $|\chi| \le \arcsin(r/s)$, jak i $|\chi| < |\gamma_0|$, co widać z Rys. 12 i 13 (gdy $a'' < 0$, $\gamma = \gamma_0 + 90^o$). Oznacza to, że oś pływania ***f*** znajduje się między osią obrotu ***e*** i główną osią bezwładności wodnicy ξ_1. Trójkąt J_1sD'' na Rys. 13 jest trójkątem równoramiennym, w którym kąt zewnętrzny równy jest $-2\gamma_0$. Stąd, sieczna J_1D'' nachylona jest względem osi odciętych pod katem $-\gamma_0$; kąt γ, określający kierunek głównej osi bezwładności wodnicy, równa się $\gamma = \gamma_0 + 90^o$.

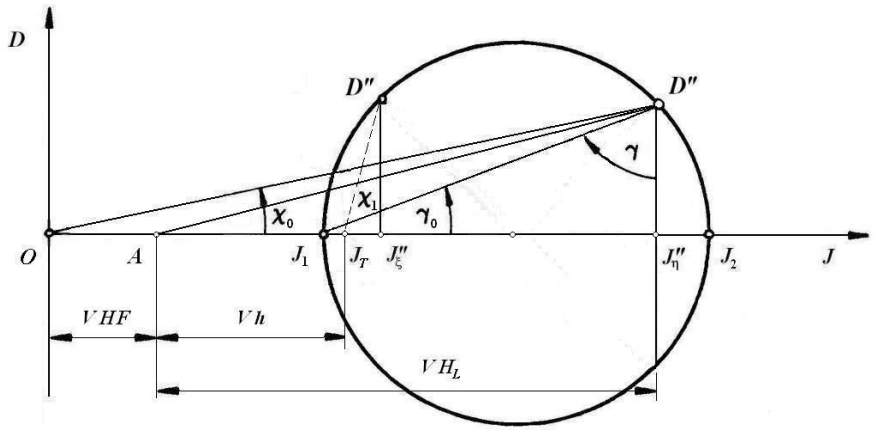
Równanie (32) ma prostą interpretację fizyczną. Kąt skierowany $\boldsymbol{f}d\alpha_1$ ma dwie składowe w układzie $\xi''\eta''$: poosiową $d\eta$ i normalną $d\tau$. Obrót wodnicy wokół osi $\boldsymbol{e}$ daje przemieszczenie wzdłużne środka wyporu, proporcjonalne do $D''d\eta$, które musi być skompensowane przegłębieniem $J_\eta''d\tau$. Stąd, $D''d\eta = J_\eta''d\tau$. Zatem, $d\tau/d\eta = D''/J_\eta''$, gdzie stosunek różniczek ma postać $d\tau/d\eta = \mathrm{tg}\chi$.

Ściśle rzecz biorąc, moment statyczny przemieszczenia wyporności w kierunku wzdłużnym $D''d\eta$ musi być skompensowany momentem przegłębiającym $VH_L d\tau$, gdzie VH_L jest współczynnikiem sztywności dla przegłębień. Stąd, $D''d\eta = VH_L d\tau$. Zatem, $d\tau/d\eta = D''/VH_L$, co daje dokładniejszą postacią wzoru (32), podaną w publikacji [6]:

$$\mathrm{tg}\chi = D''/VH_L \tag{33}$$

gdzie V jest wyporności objętościową statku, $H_L = R_L - HF$ jest wzdłużną wysokością metacentryczną, $R_L = J_\eta''/V$ jest wzdłużnym promieniem metacentrycznym, zaś $HF = -\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ jest pionową wysokością środka ciężkości nad środkiem wyporu (Rys. 3, 4 i 5). Tak więc, współczynnik sztywności $VH_L = J_\eta'' - V\cdot HF$. W przypadku statków wyraz $V\cdot HF$ jest pomijalnie mały w stosunku do wzdłużnego momentu bezwładności wodnicy J_η'', stąd wzór (33) daje w praktyce takie same wyniki, co wzór (32). Dla platform i dużych kątów przechyłu wyrazu tego pomijać nie wolno.

Interpretacja geometryczna rozwiązania (33), oznaczonego przez χ_1, pokazana jest na Rys. 14. Rozwiązanie, dane wzorem (32), oznaczone jest przez χ_0. Prosta AD'' nachylona jest pod kątem χ_1. Widać, że $\chi_1 > \chi_0$, co zmniejsza moment bezwładności wodnicy J_T, a tym samym promień metacentryczny r_F. Widać także, że $\chi_1 < \gamma$.



Rys. 14. Koło Mohra i charakterystyki stateczności

Znajomość kąta χ definiuje orientację osi pływania $\boldsymbol{f}$ oraz promień metacentryczny r_F Wersor osi pływania dany jest wzorem:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e}\cos\chi + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{e})\sin\chi \tag{34}$$

Z kolei, poprzeczny moment bezwładności wodnicy J_T definiuje promień metacentryczny $r_F \equiv J_T/V$. Mnożąc stronami równanie (28) przez wyporność V, otrzymamy:

$$\begin{aligned} J_T &= J_s/\cos\chi = (J_f^{\,2} + D_f^{\,2})^{1/2}/\cos\chi = J_f[1+(D_f/J_f)^2]^{1/2}/\cos\chi \\ &= J_f(1+\mathrm{tg}^2\chi)^{1/2}/\cos\chi = J_f/\cos^2\chi \end{aligned}$$

gdzie uwzględniliśmy wzór (30). Podstawiając $J_f = s + a_f$, gdzie $s = \frac{1}{2}(J_\xi'' + J_\eta'')$ jest środkiem przedziału bezwładności, zaś a_f jest promieniem przedziału bezwładności wodnicy po obrocie o kąt χ, danym wzorem (29), otrzymamy:

$$J_T = (s + a_f)/\cos^2\chi = (s + a''\cos 2\chi - D''\sin 2\chi)/\cos^2\chi =$$
$$s/\cos^2\chi + a''(2 - 1/\cos^2\chi) - 2D''\mathrm{tg}\chi =$$
$$(s - a'')(1 + \mathrm{tg}^2\chi) + 2a'' - 2D''\mathrm{tg}\chi =$$
$$s + a'' + (s - a'')\mathrm{tg}^2\chi - 2D''\mathrm{tg}\chi = J_\xi'' + J_\eta''\mathrm{tg}^2\chi - 2D''\mathrm{tg}\chi$$

Uwzględniając wzór (32), otrzymamy, że:

$$J_T = J_\xi'' - D''\mathrm{tg}\chi \tag{35}$$

z którego wynika, że $J_T \le J_\xi''$. Znaczy to, że równoważenie statku zmniejsza poprzeczny moment bezwładności wodnicy J_T, a tym samym promień metacentryczny r_F, co z kolei powoduje zmniejszenie ramienia prostującego – wniosek zgodny z wcześniejszymi rozważaniami, że równoważenie zmniejsza stateczność. Wyrażenie na $J_T = J_s/\cos\chi = J_\xi'' - D''\mathrm{tg}\chi$ ma prostą interpretację geometryczna na Rys. 13.

Wzór powyższy można uzyskać bezpośrednio. Obrót wodnicy wokół osi $\boldsymbol{e}$ daje przemieszczenie poprzeczne środka wyporu, proporcjonalne do $J_\xi'' d\eta$. Z kolei, równoważenie statku zmniejsza to przemieszczenie o $D'' d\tau$. Wynikowe przemieszczenie z definicji jest proporcjonalne do $J_T d\eta$. Zatem: $J_T d\eta = J_\xi'' d\eta - D'' d\tau$. Dzieląc je przez $d\eta$, otrzymamy wzór (35).

Równanie (30) oraz wzór (32) zostały wyprowadzone przy założeniu, że $\boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$, czyli że przemieszczenie środka wyporu jest normalne do osi obrotu $\boldsymbol{e}$. Dla statku swobodnie pływającego tak jednak nie jest. Zauważmy, że zmieniając przechył musimy na ogół zmienić przegłębienie, by zrównoważyć statek, co tym samym zmienia orientację osi obrotu $\boldsymbol{e}$ względem statku.

Z różniczkowania równania $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} = 0$ otrzymamy, że $\boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{r} = -d\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}$, czyli że w układzie kadłuba przemieszczenie środka wyporu nie jest normalne do osi obrotu. Powinno to być intuicyjnie zrozumiałe – skoro środek wyporu ma stale znajdować się w płaszczyźnie obrotu, która podczas przechylania zmienia orientację względem statku, to przemieszczenie środka wyporu w układzie związanym ze statkiem musi być do niej ukośne.

Gdy oś pływania $\boldsymbol{f}$ jest znana, można łatwo znaleźć kąty analityczne φ i θ, opisujące położenie okrętu względem lustra wody (wodnicy) przy nowym kącie przechyłu. Mianowicie, zmieniając nachylenie wodnic względem siebie o kąt $\Delta\alpha_1$, powodujemy obrót wersora $\boldsymbol{n}$ wokół osi pływania o kąt $\Delta\alpha_1$. Stąd, nowy wersor $\boldsymbol{n}_1$ dany jest wzorem:

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{n}\cos\Delta\alpha_1 + (\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{n})\sin\Delta\alpha_1 \tag{36}$$

Znając nowy wersor $\boldsymbol{n}$ ($\equiv \boldsymbol{n}_1$), nowe kąty analityczne odpowiadające temu wersorowi znajdziemy natychmiast ze wzoru (3), mianowicie, $\mathrm{tg}\theta = -n_x/n_z$, zaś $\mathrm{tg}\varphi = -n_y/n_z$. Znajomość nowych kątów nachylenia wodnicy znacznie przyspiesza znajdowanie zrównoważonego położenia środka wyporu przy nowym kącie przechyłu φ, ϕ czy α, w zależności od linii węzłów. Równanie nowej wodnicy w pierwszym przybliżeniu możemy przedstawić za pomocą wzoru:

$$n_x(x - x_C) - n_y(y - y_C) - n_z(z - z_C) = 0 \tag{37}$$

gdzie x_C, y_C, z_C są współrzędnymi poprzedniego środka pływania, zaś $(n_x, n_y, n_z) = \boldsymbol{n}_1$ są składowymi nowego wersora $\boldsymbol{n}$. Równanie (37) jest wygodniejsze niż (1), gdyż ze wzrostem kąta przechyłu $\mathrm{tg}\varphi$ i T_0 dążą do wartości nieograniczonych. Równanie (1) jest konieczne do rozpoczęcia obliczeń. Znając równanie wodnicy sprawdzamy, czy wyporność $V = const$ jest zachowana i czy statek jest zrównoważony, tj. czy $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} = 0$. Jeśli równania te nie są spełnione, wodnicę należy równolegle przesunąć w kierunku prostopadłym do wodnicy o wielkość $\Delta n = -\Delta V/A$ i skorygować odpowiednio kąt przegłębienia Θ, θ lub ϑ, w zależności od wyboru linii węzłów. Jeśli środek

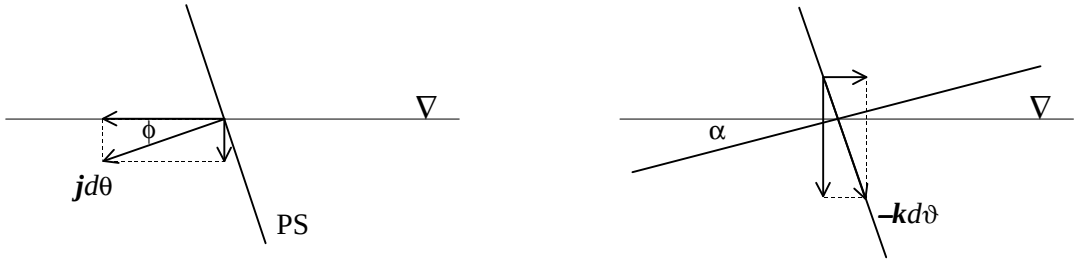
wyporu jest przed płaszczyzną obrotu ($l_e > 0$), kąt przegłębienia należy nieco zmniejszyć, obracając wodnicę wokół osi η" (Rys. 11) w kierunku dodatnim o kąt $\Delta\tau = l_e/H_L$, gdzie H_L jest wzdłużną wysokością metacentryczną. Postępowanie to jest ścisłe dla osi referencyjnej *Ox'*, gdzie oś η" jest równoległa do śladu wody na wręgach pionowych (Rys. 3). W przypadku innych osi referencyjnych, wodnicę należy obrócić wokół normalnej do PS (Rys. 4) lub wodnicy pierwotnej (Rys. 5), by nie zmienić kąta przechyłu. W zależności od linii węzłów, pionowa zmiana kąta przegłębienia określona jest wzorem:

$$-\Delta\tau = \Delta\Theta = \Delta\theta\cos\phi = -\Delta\vartheta\sin\alpha \tag{38}$$

co wynika z własności wektorowych małych obrotów, tj. z rzutowania kąta skierowanego zmiany przegłębienia na płaszczyznę morza (Rys. 15). Podstawiając $\Delta\tau = l_e/H_L$, otrzymamy:

$$-l_e = H_L\Delta\Theta = (H_L\cos\phi)\Delta\theta = -(H_L\sin\alpha)\Delta\vartheta$$

Współczynniki przy różniczkach przegłębień są współczynnikami sztywności względem zmiany przegłębienia, czyli wzdłużną wysokością metacentryczną. Z wyjątkiem przegłębienia pionowego, w przypadku przegłębień ukośnych wysokości metacentryczne są niepełne, gdyż nie uwzględniają składowej pionowej zmiany przegłębienia, która obraca statek w płaszczyźnie morza.



Rys. 15. Dodatnia zmiana przegłębienia ukośnego

Obliczenie krzywej ramion można znacznie przyspieszyć, jeśli wykorzystać własności wodnic równoobjętościowych statku swobodnie pływającego, tj. metodą Kryłowa–Dargniesa, zmodyfikowaną dla statku swobodnie pływającego. W skończonym przedziale kąta obrotu Δη wodnice toczą się po powierzchni pewnego stożka, którego parametry można z góry przewidzieć, patrz publikacja [6]. Toczące się wodnice stykają się ze stożkiem wzdłuż chwilowej osi pływania ***f***.

4.5. Mechanizm przechyłów równoobjętościowych

Nieskończenie mały obrót wodnicy wokół osi pływania ***f*** można uważać za wypadkowy dwóch obrotów: obrotu o kąt $d\eta$ wokół osi ξ", równoległej do osi obrotu ***e***, i obrotu o kąt $d\tau$ wokół osi η", normalnej do osi obrotu ***e*** (Rys. 11). Kąt skierowany $\boldsymbol{f}d\alpha_1$ ma zatem w układzie ξ"η" dwie składowe, równe wspomnianym obrotom elementarnym: $\boldsymbol{f}d\alpha_1 = (d\eta,\ d\tau)$.

Kąt skierowany $\boldsymbol{f}d\alpha_1$ nachylony jest pod kątem χ do osi obrotu ***e*** (Rys. 11). Dodatniemu kątowi χ odpowiada *dodatnia* składowa normalna $d\tau$, zaś zmiana przegłębienia jest *ujemna* (na rufę). Rzut $d\alpha_1$ na oś obrotu daje związek (27). Biorąc pod uwagę zależności występujące w trójkącie prostokątnym, składową normalną $d\tau$ możemy wyznaczyć na dwa sposoby:

$$d\tau = d\alpha_1\sin\chi = d\eta\,\mathrm{tg}\chi \tag{39}$$

Ze wzoru tego wynika, że 1) im bardziej oś pływania odchylona jest od osi obrotu, tym większe zmiany przegłębienia podczas przechyłów; 2) gdy $\chi = 0$, czyli gdy $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{f}$, przegłębienie statku nie

zmienia się w wyniku obrotu wodnicy, jak dla statku z ustalonym przegłębieniem; 3) ze wzoru (38) wynika, że dla $\phi = 90°$ (PS jest wtedy pozioma), $d\tau = 0$. Zobaczymy później, że osiągnięcie kąta $\phi = 90°$ przez statek swobodnie pływający jest niemożliwe.

W przypadku osi referencyjnych *y* i *z* kąt obrotu płaszczyzn referencyjnych wokół normalnych, związany z przegłębianiem, równy $\boldsymbol{j}d\theta$ czy $-\boldsymbol{k}d\vartheta$, ma też składową pionową $d\psi$. Składowa ta jest obrotem (zmianą orientacji) statku w płaszczyźnie morza. W przypadku PS równa się ona $-d\theta\sin\phi$, a w przypadku PP równa się $-d\vartheta\cos\alpha$ (Rys. 15). Tak więc,

$$d\psi = -d\theta\sin\phi = -d\vartheta\cos\alpha \tag{40}$$

W obu sytuacjach składowa pionowa obrotu płaszczyzny referencyjnej skierowana jest w dół, obrót statku w płaszczyźnie morza odbywa się więc zgodnie ze wskazówkami zegara. Gdybyśmy pominęli ten obrót, to w wyniku przegłębienia oś obrotu zmieniłaby azymut.

Uwzględniając wzory (38) i (39) różniczkę $d\psi$ można wyrazić wprost w kategoriach przyrostu kąta przechyłu $d\eta$. Mianowicie, $d\psi = d\tau\,\mathrm{tg}\,\phi = -d\tau\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, gdzie $d\tau = d\eta\,\mathrm{tg}\,\chi$ jest obrotem statku w płaszczyźnie morza. Kąty obrotu PS czy wodnicy pierwotnej wokół śladu wody nie mają składowych pionowych, gdyż są skierowane poziomo (Rys. 2).

Inna sytuacja jest w przypadku osi referencyjnej *x*: zmiana kąta przegłębienia, jako wektor, skierowana jest poziomo, zatem nie ma składowej pionowej (Rys. 3). Natomiast kąt obrotu owręża wokół normalnej $-\boldsymbol{i}d\varphi$ ma składową poziomą: $-d\varphi\cos\Theta$, oraz pionową: $-d\varphi\sin\Theta$. Obroty wodnicy względem statku mają znak przeciwny: ($d\varphi\cos\Theta$, $d\varphi\sin\Theta$). Składowa pozioma jest obrotem wodnicy względem statku, tak więc: $d\eta = d\varphi\cos\Theta$. Składowa pionowa $d\psi = d\varphi\sin\Theta = d\eta\,\mathrm{tg}\,\Theta$ jest zmianą orientacji osi obrotu $\boldsymbol{e}$ względem kadłuba. Gdy w położeniu wyprostowanym statek jest przegłębiony, kąty φ i Θ zastępujemy katami φ' i Θ', a kąty α i ϑ – kątami α' i ϑ'.

Warto podkreślić, że obrót statku w płaszczyźnie morza o kąt $d\psi$, wywołany równoważeniem statku, nie ma *bezpośredniego* wpływu na obliczenia krzywej ramion. W szczególności, nie wpływa na orientację osi pływania $\boldsymbol{f}$ w układzie statku. Tak więc, jeśli dla nowej wodnicy kąt χ zmieni się o $d\chi$, to nowa oś pływania obróci się względem poprzedniej o kąt $d\chi$; obrót statku w płaszczyźnie morza nie zmienia bowiem wodnicy. Gdy kąt $d\chi > 0$ jest dodatni, nowa oś pływania $\boldsymbol{f}$ przesuwa się w kierunku przechyłu, czyli oddala się od osi obrotu $\boldsymbol{e}$.

Wodnice równoobjętościowe toczą się po niekołowym stożku, którego oś nachylona jest do wodnic pod kątem ε, określonym wzorem: $\sin\varepsilon = d\chi/d\alpha_1$. Wyprowadzenie tego wzoru jest elementarne. Gdy stożek toczy się bez poślizgu, podstawa stożka zakreśla łuk o długości $l\chi = r\alpha$. Stąd, $\chi/\alpha = r/l = \sin\varepsilon$, gdzie χ jest kątem obrotu stożka na płaszczyźnie toczenia, α jest kątem obrotu stożka wokół własnej osi, *r* jest promieniem podstawy, zaś *l* jest długością tworzącej. W kinematyce, wspomniany stożek, po którym toczą się wodnice równoobjętościowe jest przykładem prostokreślnej *aksoidy nieruchomej*, a toczące się wodnice – *aksoidy ruchomej*.

Gdy kąt $d\chi > 0$ jest dodatni, stożek leży nad wodnicami, w przeciwnym przypadku – poniżej wodnic. Wierzchołek stożka znajduje się w odległości tworzącej *l* od środka pływania *C*, danej wzorem $l = -d\eta'_C/d\chi$, gdzie $d\eta'_C$ jest przemieszczeniem środka pływania w kierunku normalnym do osi pływania (gdy $l > 0$, wierzchołek jest w kierunku dziobu). Uwzględniając, że $d\eta'_C = r_C d\alpha_1$, otrzymamy:

$$l = -r_C d\alpha_1/d\chi = -r_C/\sin\varepsilon$$

gdzie $r_C = dJ_f/dV$ jest różniczkowym promieniem metacentrycznym (promieniem krzywizny krzywej środków pływania). Ze wzoru widać, że promień podstawy stożka na wysokości środka pływania równa się różniczkowemu promieniowi metacentrycznemu.

PRZYKŁAD. Można pokazać, że kąt między wodnicami dany jest wzorem:

$$\cos\alpha' = \cos^2\varepsilon\cos\alpha + \sin^2\varepsilon$$

Zwykle kąt $\varepsilon \approx 0$ jest mały, wówczas $\alpha' \approx \alpha$.

Jeśli przechył statku zwiększymy o $d\eta$, przemieszczenie środka wyporu w kierunku normalnym do płaszczyzny obrotu jest proporcjonalne do $D''d\eta$, gdzie D'' jest momentem dewiacyjnym wodnicy w układzie $\xi''\eta''$ (Rys. 11). Przemieszczenie to musi być zniwelowane przegłębieniem $J_\eta'' d\tau$. Przyrównując je do siebie, mamy $d\tau = (D''/J_\eta'')\,d\eta$. Stąd, $d\tau/d\eta = D''/J_\eta''$. Uwzględniając wzór (39), otrzymamy z powyższego wzór (32). Dokładniejsze rozwiązanie otrzymamy stosując wzór metacentryczny na $d\tau = (D''/VH_L)\,d\eta$, gdzie $H_L = R_L - HF$ jest wzdłużną wysokością metacentryczną, co prowadzi do wzoru (33).

Ramię prostujące statku określa się wg wzoru (22). Aby z niego skorzystać dla zadanego kąta przechyłu $\eta = const$ i zadanej wyporności $V = const$ musimy znać przegłębienie, przy którym statek jest wzdłużnie zrównoważony, tj. $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} = 0$. Zwykle znajduje się je metodą kolejnych przybliżeń. Proces ten można przyspieszyć, jeśli zna się zmianę wzdłużnej składowej ramienia prostującego $dl_e = d(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}) = d\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} + \boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{r}$, wywołaną zmianą przegłębienia.

Zmianę wersora osi obrotu $d\boldsymbol{e}$ w układzie statku na skutek zmiany przegłębienia można łatwo otrzymać przy pomocy Rys. 3, 4 i 5. W pierwszym przypadku zmiana wynika z obrotu wersora $\boldsymbol{e}$ w pionie o kąt $d\Theta$, w drugim – o kąt $d\theta$ w PS, a w trzecim – o kąt $d\vartheta$ w płaszczyźnie wodnicy pierwotnej, stąd:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{e} &= \boldsymbol{n}\,d\Theta; \\ d\boldsymbol{e} &= (\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{j})\,d\theta; \\ d\boldsymbol{e} &= -(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k})\,d\vartheta \end{aligned} \tag{41}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\,d\Theta = -HF\,d\Theta; \\ d\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{j})\,d\theta = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}_Z = r_Z d\theta = -(HF\cos\phi - l\sin\phi)\,d\theta; \\ d\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} &= -\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{k})\,d\vartheta = \boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e})\,d\vartheta = (HF\sin\alpha + l\cos\alpha)\,d\vartheta \end{aligned}$$

gdzie HF jest pionową odległością między środkiem ciężkości i środkiem wyporu (Rys. 3), $\boldsymbol{e}_Z \equiv \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{j}$ jest wersorem osi OZ, sztywno związanej z płaszczyzną obrotu; oś ta jest krawędzią przecięcia się PS z płaszczyzną obrotu (Rys. 4), r_Z jest rzutem promienia wodzącego środka wyporu $\boldsymbol{r}$ na oś OZ, zaś $\boldsymbol{r}\cdot(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e})$ jest rzutem $\boldsymbol{r}$ na krawędź przecięcia się płaszczyzny obrotu z wodnicą pierwotną. Drugi związek wynika z rzutowania odcinka HF na oś OZ, odchyloną od pionu o kąt ϕ (Rys. 4), a trzeci – z rzutowania HF na oś Oz', odchyloną od pionu o kąt α (Rys. 5).

W przypadku osi Ox', drugi przyczynek do zmiany dl_e dany jest wzorem: $\boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{r} = R_L d\Theta$, gdzie R_L jest wzdłużną wysokością metacentryczną, co wynika z wcześniejszych rozważań. W przypadku innych osi referencyjnych, pionowa zmiana kąta przegłębienia określona jest wzorem (38).

Dodatkowo musimy uwzględnić wpływ obrotu statku w płaszczyźnie morza na przemieszczenie środka wyporu względem płaszczyzny obrotu: $-ld\psi$, co wynika wprost z Rys. 4 i 5, gdzie $d\psi$ jest obrotem statku w płaszczyźnie morza, wywołanym przegłębieniem, danym wzorem (40), zaś l jest ramieniem prostującym. Gdy $d\psi < 0$, obrót jest zgodny z ruchem wskazówek zegara, przemieszczenie środka wyporu jest dodatnie, czyli w stronę dziobu. W przypadku osi referencyjnej x', $d\psi = 0$, gdyż pionowa zmiana przegłębienia nie powoduje obrotu statku w płaszczyźnie morza (Rys. 3); obrót ten występuje jedynie podczas ukośnych przegłębień (Rys. 4 i 5).

Tak więc, łącząc powyższe przyczynki, w zależności od osi referencyjnej zmiana ramienia przegłębiającego dl_e wyrazi się wzorem:

$$dl_e = (R_L - HF)d\Theta;$$
$$dl_e = [R_L\cos\phi - (HF\cos\phi - l\sin\phi) + l\sin\phi]d\theta;$$
$$dl_e = [-R_L\sin\alpha + (HF\sin\alpha + l\cos\alpha) + l\cos\alpha]d\vartheta$$

Po redukcji, otrzymamy ostatecznie:

$$\begin{aligned} dl_e &= H_L d\Theta; \\ dl_e &= (H_L\cos\phi + 2l\sin\phi)d\theta; \\ dl_e &= (H_L\sin\alpha - 2l\cos\alpha)(\mp d\vartheta) \end{aligned} \tag{42}$$

W trzecim przypadku musimy uważać na znak α. Gdy przechył jest na lewą burtę ($\alpha > 0$), dodatni przyrost kąta skrętu $d\vartheta$ oznacza przegłębianie na rufę, czyli zmiana $dl_e < 0$ jest ujemna. Stąd, $d\vartheta$ trzeba wziąć ze znakiem przeciwnym. Gdy przechył jest na prawą burtę ($\alpha < 0$), dodatni przyrost kąta skrętu $d\vartheta$ daje zmianę dl_e zgodną ze znakiem $d\vartheta$. Inaczej mówiąc, wyrażenie na $H_{L\vartheta}$ zmienia znak na przeciwny dla $\alpha < 0$.

Wzory te pozwalają na szybkie znajdowanie przegłębienia równowagi. Wyrażenia w nawiasach przedstawiają pochodną wzdłużnego ramienia prostującego l_e względem odpowiedniego kąta przegłębienia, czyli wzdłużną wysokość metacentryczną dla wybranej osi referencyjnej: $H_{L\Theta}$ $H_{L\theta}$ i $H_{L\vartheta}$, rozumianą jako sztywność względem odpowiedniego przegłębienia. Ta pierwsza jest klasyczną wzdłużną wysokością metacentryczną $H_{L\Theta} \equiv H_L$ dla przegłębień pionowych. W przypadku przegłębień ukośnych, wzdłużna wysokość metacentryczna zależy dodatkowo od ramienia prostującego l.

W trakcie przechylania wzdłużna wysokość metacentryczna zmienia się. Gdy osiągnie ujemną wartość, oznacza to brak zrównoważenia wzdłużnego, a tym samym brak możliwości wyznaczenia ramienia prostującego. Zjawisko to określa się jako wygaśnięcie stateczności (ang. *fading stability*). Problemu tego nie ma na statkach z ustalonym przegłębieniem – krzywa ramion jest określona w każdym punkcie.

W położeniu wyprostowanym $H_{L\Theta} = H_{L\theta} = H_L$, zaś $H_{L\vartheta} = -2l_0$. Gdy $l_0 = 0$, gdzie l_0 jest ramieniem prostującym w pozycji wyprostowanej, wzdłużna wysokość metacentryczna jest funkcją parzystą. Gdy $l_0 \neq 0$, czyli gdy jest wstępny przechył, w przypadku osi referencyjnej Oz' krzywa ramion jest nieokreślona w pewnym sąsiedztwie zera. Dla dwóch pozostałych osi referencyjnych krzywa jest ciągła w sąsiedztwie zera. Gdy $\alpha \to 90°$, $H_{L\vartheta} \to H_L$ dąży do wzdłużnej wysokości metacentrycznej, jak dla osi referencyjnej Ox', a $H_{L\theta}$ dąży do wartości ujemnych. Oznacza to, że w pewnym otoczeniu $\phi = 90°$ występuje wygaśnięcie krzywej ramion związanej z osią referencyjną Oy.

Wyrażenie na $H_{L\vartheta}$ pozwala oszacować zewnętrzny kraniec przedziału, w którym krzywa ramion dla osi Oz' jest nieokreślona. Ze wzoru (42) wynika, że

$$\operatorname{tg}\alpha = 2l/H_L \tag{43}$$

Kąt ten można wyrazić w kategoriach wstępnego przechyłu α_0. Przyjmując, że $\alpha_0 = -l_0/h_0$, gdzie h_0 jest początkową wysokością metacentryczną, otrzymamy wzór: $\alpha = -2\alpha_0 h_0/H_L$. Widzimy, że długość przedziału z wygaszoną statecznością jest proporcjonalna do wstępnego przechyłu i że przedział ten jest po przeciwnej stronie zera, zaczynając się dokładnie w zerze. Dla statków konwencjonalnych, jest on niezauważalny. Jest natomiast charakterystyczny dla platform półzanurzeniowych, zwłaszcza samopodnośnych, gdzie wzdłużna wysokość metacentryczna H_L jest stosunkowo mała, a ramiona prostujące stosunkowo duże. Dla kątów przechyłu na burtę wstępnego przechyłu, krzywa ramion określona jest w każdym punkcie.

Kąt χ, dany wzorem (33), definiujący orientację osi pływania ***f*** względem osi obrotu ***e***, został wyprowadzony bez uwzględnienia obrotu statku w płaszczyźnie morza. Kąt χ wpływa na poprzeczny promień metacentryczny $r_F = J_T/V$ poprzez poprzeczny moment bezwładności wodnicy statku J_T, dany wzorem (35). Uściślenie wzoru na kąt χ jest proste. Obrót statku (wodnicy) o $d\eta$ daje nie tylko moment statyczny przemieszczenia wyporności w kierunku wzdłużnym, równy $D''d\eta$, lecz także obrót statku w płaszczyźnie morza o kąt $d\psi = d\varphi\sin\Theta$, skierowany w górę, jeśli statek przegłębiony jest na dziób. Obrót ten *oddala* środek wyporu od płaszczyzny obrotu w kierunku rufy o $ld\psi$. Ta sumaryczna zmiana momentu statycznego wyporności musi być skompensowana momentem przegłębiającym $VH_L d\tau$. Tak więc:

$$D''d\eta - Vld\psi = VH_L d\tau,$$
$$D'' - Vld\psi/d\eta = VH_L d\tau/d\eta.$$

Uwzględniając, że $d\psi/d\eta = \mathrm{tg}\Theta$, zaś $d\tau/d\eta = \mathrm{tg}\chi$, otrzymamy:

$$\mathrm{tg}\chi = (D'' - Vl\,\mathrm{tg}\Theta)/VH_L \tag{44}$$

Wzór powyższy jest ważny dla osi referencyjnej *Ox*. Gdy statek ma przegłębienie wstępne, kąt Θ zastępujemy kątem Θ'. Jeśli pominąć $\mathrm{tg}\Theta$ jako wielkość małą, wzór redukuje się do wzoru (33).

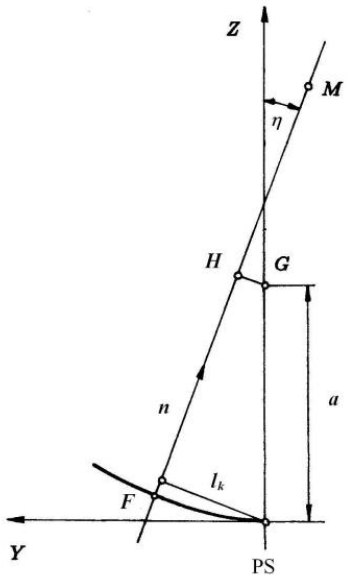
W przypadku dwóch pozostałych osi referencyjnych, elementarny obrót statku $d\eta$, równy $d\phi$ lub $d\alpha$, nie ma składowej pionowej. Wobec tego moment statyczny przemieszczenia wyporności w kierunku wzdłużnym $D''d\eta$ musi być skompensowany przegłębieniem $-Vdl_e$, gdzie dl_e dane jest wzorem (42). Stąd: $D''d\eta$ musi równać się $-VH_{L\theta}d\theta$, lub $VH_{L\vartheta}d\vartheta$. Wykorzystując wzory (38), otrzymamy:

$$\begin{aligned}\mathrm{tg}\chi &= \cos\phi D''/VH_{L\theta}\\ \mathrm{tg}\chi &= -\sin\alpha D''/VH_{L\vartheta}\end{aligned} \tag{45}$$

Gdy statek ma przegłębienie wstępne, kąt α zastępujemy kątem α'.

4.6. Własności krzywej ramion prostujących

Znając promienie metacentryczne statku swobodnie pływającego $r_F = MH$, łatwo jest już znaleźć pozostałe charakterystyki krzywej ramion prostujących. Są one analogiczne do tych z klasycznej teorii okrętu. I tak, wysokość metacentryczna $h \equiv HM$ równa się:



Rys. 16. Płaszczyzna obrotu

$$h = {}^{d}/_{d\eta}\, l = r_F - HF \tag{46}$$

gdzie r_F jest promieniem metacentrycznym, danym wzorem (28), $HF = -\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}$ jest pionową wysokością środka ciężkości nad środkiem wyporu (Rys. 3, 4 i 5), $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{GF}$ jest promieniem wodzącym środka wyporu względem środka ciężkości statku, zaś $\boldsymbol{n}$ jest wersorem normalnym do wodnicy, danym wzorem (3) lub wzorami alternatywnymi. Wzór (46) można natychmiast otrzymać rozpatrując linię działania siły wyporu w płaszczyźnie obrotu (Rys. 16) dla kąta przechyłu η powiększonego o kąt $d\eta = d\varphi\cos\Theta$, $d\phi$ lub $d\alpha$, w zależności od wyboru linii węzłów (układ F_0YZ jest sztywno związany z płaszczyzną obrotu, którego początek znajduje się w początkowym położeniu środka wyporu F_0).

Wysokość metacentryczną można otrzymać także różniczkując ramię prostujące $l \equiv GH$, dane wzorem (22), względem kąta obrotu (przechyłu) w układzie związanym ze statkiem. Pochodna ta dana jest wzorem:

$$GH' = \boldsymbol{e}' \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}') = r_F + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}$$

identycznym ze wzorem (46), gdzie ' oznacza różniczkowanie względem η. Można pokazać, że pierwszy wyraz zeruje się (wystarczy zauważyć, że te trzy wektory są koplanarne, tj. leżą w płaszczyźnie obrotu), drugi daje promień metacentryczny $r_F \equiv FM$, zaś trzeci równa się $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}$.

Praca momentu prostującego wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\eta} M d\eta = D \int_0^{\eta} l d\eta = D l_d \\ l_d &= \int_0^{\eta} l d\eta \end{aligned} \tag{47}$$

gdzie D jest wyporem statku, zaś l_d jest ramieniem dynamicznym. Widzimy, że pole pod krzywą ramion prostujących, zwane *ramieniem dynamicznym*, jest proporcjonalne do pracy momentu prostującego. Rozpatrując obrót płaszczyzny obrotu (Rys. 3, 4, 5 i Rys. 16) o kąt $d\eta$, można pokazać, że różniczka $GH d\eta = d(HF)$ jest przyrostem odcinka HF wywołanym pionowym przemieszczeniem się punktu H, ponieważ środek wyporu F przemieszcza się poziomo, tj. równolegle do wodnicy. Stąd, otrzymuje się znany wzór na ramię dynamiczne:

$$l_d = HF - a \tag{48}$$

gdzie $a = F_0G$ jest wzniosem środka ciężkości G nad środkiem wyporu w położeniu wyprostowanym. Wzór ten ma prostą interpretację fizyczną – ramię dynamiczne równa się pionowemu przyrostowi odległości między środkiem ciężkości i środkiem wyporu. Jest ono użyteczne do sprawdzania dokładności obliczeń krzywej ramion. Wstępny przechył nie ma na niego wpływu.

Warto wspomnieć, że krzywa ramion prostujących statku swobodnie pływającego odpowiada zasadzie minimum energii potencjalnej, tzn. przechylenie statku (rozumiane jako obrót płaszczyzny obrotu) o zadany kąt wymaga minimalnej pracy. Jest to ważna własność tej krzywej. Aby ją udowodnić zauważmy, że wychylenie statku z położenia równowagi wzdłużnej jest niemożliwe bez przyłożenia momentu przegłębiającego i wykonania dodatkowej pracy, zwiększającej energię potencjalną statku. Stąd wynika, że ramiona prostujące statku swobodnie pływającego są co najwyżej równe lub mniejsze od ramion prostujących statku z ustalonym przegłębieniem, co dobrze ilustruje Rys. 1. Jeśli jest inaczej, znaczy to, że algorytm obliczeniowy jest błędny.

Uwzględniając powyższe, ramiona dynamiczne statku swobodnie pływającego i z ustalonym przegłębieniem powiązane są zależnością:

$$l_d = l_{dc} - \int_0^{\Theta} (\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}) d\Theta$$

gdzie Θ jest kątem przegłębienia dla zadanego kąta obrotu płaszczyzny obrotu η, mierzonym w płaszczyźnie pionowej. Jeśli przyjąć, że wzdłużna wysokość metacentryczna H_L nie zmienia się w trakcie równoważenia, ze wzoru (42) wynika, że $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} = H_L\Theta$, stąd: $l_d \approx l_{dc} - \frac{1}{2} H_L \Theta^2$. Jak widać, znak przegłębienia nie ma znaczenia. Różniczkując ten wzór względem kąta obrotu η płaszczyzny obrotu, otrzymamy: $l \approx l_c - \frac{1}{2}(H_L\Theta^2)'$, stąd:

$$l \approx l_c - (\tfrac{1}{2} H_L' \Theta^2 + H_L \Theta \Theta') \tag{49}$$

Ze wzoru wynikają dwa ważne wnioski. Po pierwsze, krzywa ramion statku swobodnie pływającego jest tym mniejsza im większe są zmiany przegłębienia w położeniu równowagi. Po drugie,

krzywe ramion o *jeszcze* mniejszych ramionach musiałyby mieć jeszcze większe zmiany przegłębienia, co jest niemożliwe, gdyż nie ma innego położenia równowagi, niż to, które osiąga statek swobodnie pływający, zmieniając bowiem przegłębienie środek wyporu oddala się monotonicznie od płaszczyzny obrotu. Krzywe ramion statku swobodnie pływającego są więc jednocześnie krzywymi o najmniejszych ramionach. Inaczej mówiąc, wzdłużne równoważenie statku zapewnia jednocześnie minimum energii potencjalnej przy danym kącie przechyłu.

Gdy w położeniu początkowym statek ma początkowe przegłębienie Θ_0, za kąt przegłębienia we wzorze (49) należy rozumieć zmianę kąta przegłębienia $\Theta - \Theta_0$. Warto pamiętać, że stałe przegłębienie θ, mierzone w PS, nie oznacza, że przegłębienie w płaszczyźnie pionowej $\Theta = const$. Ze wzoru (4) wynika, że gdy $\theta = const$, kąt Θ maleje do zera, gdy φ dąży do 90°. Oznacza to, że ze wzrostem kąta przechyłu różnica między krzywą ramion na równej stępce i ustalonym przegłębieniem, jak w położenie wyprostowanym powinna zanikać do zera, co potwierdzają obliczenia numeryczne.

4.7. Pantokareny

Ramię kształtu (pantokarena), czyli ramię siły wyporu względem początkowego położenia środka wyporu, pokazane na Rys. 16, dane jest wzorem:

$$l_k = l + a\sin\eta \tag{50}$$

Dla statku swobodnie pływającego, ramiona kształtu *zależą* od wzniosu środka ciężkości nad PP. Gdy występuje przegłębienie, zmieniając *KG*, środek ciężkości nie pozostaje w płaszczyźnie obrotu, co wywołuje zmianę przegłębienia statku, a to z kolei pociąga za sobą zmianę ramienia kształtu, czyniąc je zależne od *KG*. Stąd, idei pantokaren, ściśle rzecz biorąc, nie stosuje się do statku swobodnie pływającego.

Zauważmy, że oś *z* na ogół nie leży w płaszczyźnie obrotu: jest nachylona do niej pod kątem δ, określonym wzorem: $\sin\delta = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{k} = e_z$. Dla osi referencyjnej *x*, oś $\boldsymbol{e}$ dana jest wzorem (21), stąd: $\sin\delta = \cos\varphi\,\mathrm{tg}\theta\cos\alpha = \mathrm{tg}\Theta\cos\alpha$. W przypadku osi referencyjnej *y* łatwo zauważyć, że odchylenie $\delta = \theta$, a dla osi referencyjnej *Oz'*, prostopadłej do wodnicy pierwotnej, $\delta = 0$, czyli oś ta znajduje się w płaszczyźnie obrotu.

Zatem, przesuwając środek ciężkości wzdłuż osi *Oz* o wielkość Δz_G powodujemy, że wysuwamy się przed płaszczyznę obrotu na odległość $l_e = \Delta z_G \sin\delta$. Powoduje to, że statek jest niezrównoważony i musi się przegłębić w płaszczyźnie pionowej o kąt $\Delta\Theta = l_e/H_L$, gdzie H_L jest wzdłużną wysokością metacentryczną przy danym kącie przechyłu η. Statek równoważymy bez zmiany kąta przechyłu, zmieniając jedynie przegłębienie. W takim wypadku, związek między kątami przegłębienia jest taki, jak we wzorze (38). Stąd mamy korektę przegłębienia, w zależności od linii węzłów. Rys. 16 pozwala łatwo ustalić, że nowe ramię prostujące wyniesie:

$$l_1 = l - \Delta z_G \cos\delta\sin\eta + (D''/V)\,\Delta\Theta \tag{51}$$

gdzie *D''* jest momentem dewiacyjnym wodnicy w układzie ξ"η", jak na Rys. 11. W przypadku normalnie spotykanych przegłębień funkcję $\cos\delta \approx 1$ można opuścić. Dwa pierwsze wyrazy w powyższym wzorze są takie same, jak dla statku o stałym przegłębieniu. Ostatni wyraz $(D''/V)\Delta\Theta$, oznaczony przez Δl, uwzględnia wpływ zmiany przegłębienia na krzywą ramion statku swobodnie pływającego. Uwzględniając, że $\Delta\Theta = l_e/H_L$ oraz wzór (33), otrzymamy:

$$\Delta l = \Delta z_G \sin\delta\,\mathrm{tg}\chi \tag{52}$$

Poprawka ta odpada, gdy osią referencyjną jest oś *Oz'*, gdyż $\delta \equiv 0$. W innych przypadkach do obliczenia poprawki Δl musielibyśmy mieć dodatkowe informacje dotyczące przebiegu kątów δ i χ w funkcji kąta przechyłu η. Kąty te zależą jednak od położenia środka ciężkości statku, co powoduje, że idea pantokaren traci wówczas sens.

Pewnym wyjściem z sytuacji jest obliczanie pantokaren w formie krzywej ramion *l* dla wybranego typowego położenia środka ciężkości statku. Przy niewielkich zmianach rzędnych środka ciężkości iloraz $\Delta l/\Delta z_G = \sin\delta\,\mathrm{tg}\chi$ jest wówczas praktycznie niezależny od położenia środka ciężkości. W celu obliczenia poprawki Δl wystarczy znać przebieg tego ilorazu w funkcji kąta przechyłu η. Wzór (51) na nową krzywą ramion przyjmie wówczas postać:

$$l_1 = l - (\sin\eta - \sin\delta\,\mathrm{tg}\chi)\Delta z_G \tag{53}$$

Pantokareny przedstawia się w formie wykresu $l = l(V, \eta = const)$. W podobny sposób należy przestawić wykres dotyczący ilorazu różnicowego $\Delta l/\Delta z_G = \sin\theta\,\mathrm{tg}\chi$, jako funkcję wyporności *V*, dla ustalonego η.

5. KINEMATYKA STATKU SWOBODNEGO

Orientację wodnicy względem statku opisują kąty analityczne φ i θ. Za ich pomocą można wyrazić wszelkie inne kąty, występujące między różnymi płaszczyznami i osiami, przy czym relacje te *nie zależą* od wyboru osi referencyjnej. Od wyboru osi zależy jednak orientacja osi pływania ***f*** na wodnicy i statku względem płaszczyzny obrotu, w której go równoważymy (duże koło na Rys. 3, 4 i 5), a tym samym – ramię prostujące, dane wzorem (22).

Przykładowo, wzór (3) na składowe wersora ***n***, normalnego do wodnicy, jest ważny bez względu na wybór osi referencyjnej. W każdym przypadku można go wyrazić bezpośrednio za pomocą kątów Eulera odpowiednich dla danej osi referencyjnej. Gdy linią węzłów jest ślad wody w PP (co ma miejsce, gdy w położeniu wyprostowanym statek jest na równej stępce), ze wzoru (3) należy wyrugować kąty analityczne, stosując relacje: $\mathrm{tg}\theta = -\sin\vartheta\,\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\varphi = \cos\vartheta\,\mathrm{tg}\alpha$. Stąd:

$$\boldsymbol{n} = (\sin\vartheta\sin\alpha,\ -\cos\vartheta\sin\alpha,\ \cos\alpha) \tag{54}$$

który otrzymaliśmy już wcześniej – wzór (20). Gdy w położeniu wyprostowanym statek jest przegłębiony, kąty α i ϑ zastępujemy kątami α' i ϑ'. Linią węzłów jest wówczas ślad wody na wodnicy pierwotnej, tj. krawędź przecięcia się wodnicy z wodnicą pierwotną.

Gdy linią węzłów jest ślad wody w PS, kątami Eulera są kąty θ i ϕ. We wzorze (3) należy uwzględnić wzór na $\cos\alpha = \cos\theta\cos\phi$ oraz wzór (5) na $\mathrm{tg}\phi$, otrzymamy natychmiast:

$$\boldsymbol{n} = (-\sin\theta\cos\phi,\ -\sin\phi,\ \cos\theta\cos\phi) \tag{55}$$

Analogicznie, gdy linią węzłów jest ślad wody na owrężu, wersor ***n*** w kategoriach kątów Eulera φ i Θ wyrazi się następująco:

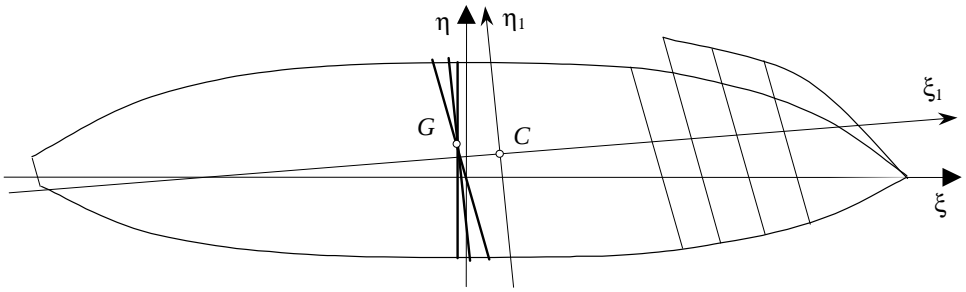
$$\boldsymbol{n} = (-\sin\Theta,\ -\cos\Theta\sin\varphi,\ \cos\Theta\cos\varphi) \tag{56}$$

Gdy w położeniu wyprostowanym statek jest przegłębiony, kąty φ i Θ zastępujemy kątami φ' i Θ'.

W przypadku osi referencyjnej *Ox'*, powszechnie używanej do obliczeń krzywej ramion statku swobodnie pływającego, jak np. w programie NAPA, PROTEUS, STATAW, WinSEA, itp., płaszczyzna obrotu jest wręgiem pionowym, prostopadłym do lustra wody i równoległym do śladu wody na wręgach (Rys. 3); w przypadku osi *Oy* – jest prostopadła do śladu wody w PS (Rys. 4), a w przypadku osi *Oz'* – prostopadła do śladu wody na wodnicy pierwotnej (Rys. 5).

Inaczej mówiąc, w pierwszym wypadku płaszczyzna obrotu jest *równoległa* do linii węzłów, zaś w dwóch ostatnich sytuacjach – *prostopadła* do linii węzłów.

Należy podkreślić, że w przestrzeni jest *jedna* płaszczyzna obrotu (duże koło na wspomnianych rysunkach). Jednak, w zależności od sposobu równoważenia, statek ustawia się inaczej względem niej. W przypadku osi referencyjnej *Ox'* w celu wzdłużnego zrównoważenia przegłębianie statku odbywa się w pionie, wokół śladu wody na wręgach pionowych (Rys. 3), w przypadku osi *y* – wokół normalnej do PS (Rys. 4), czyli osi *y*, a w przypadku osi *Oz'* – wokół normalnej do wodnicy pierwotnej (Rys. 5). Po zrównoważeniu statek ma więc różną orientację względem płaszczyzny obrotu, co powoduje, że ramiona prostujące są różne, zależne od sposobu równoważenia (wyboru osi referencyjnej), lecz ten sam kierunek momentu prostującego w przestrzeni. Różnice w ustawieniu płaszczyzn obrotu względem śladu wody w PS (osi ξ) ilustruje Rys. 17. Odchylenia tych płaszczyzn od płaszczyzny normalnej do osi ξ opisują kąty γ_1, γ_2 i γ_3. Najczęściej $\gamma_2 = 0$, a dla krzywej minimalnej stateczności $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, co oznacza jednakową płaszczyznę obrotu, niezależną od wyboru osi referencyjnej.



Rys. 17. Płaszczyzny obrotu na tle wodnicy pływania

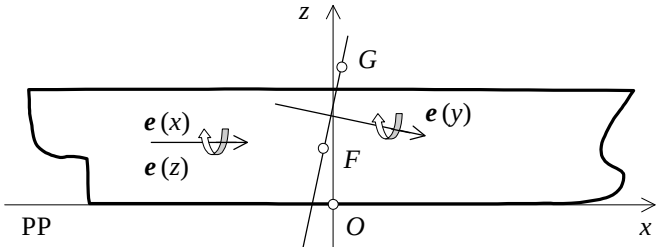
Wpływ płaszczyzny obrotu (osi referencyjnej) na ramiona prostujące widać wyraźnie ze wzoru (22), gdzie ramię prostujące *l* zależy od ***r***, ***n*** i ***e***. Dla tych samych kątów analitycznych φ i θ, wektor $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{n}$ jest taki sam, lecz różne płaszczyzny obrotu mają inne ***e***, co w efekcie daje różne ramiona *l*. Tym niemniej, pola pod krzywymi ramion dla różnych osi referencyjnych są takie same. Dowód jest prosty. Jeśli wielkie koła na Rys. 3, 4 i 5 obrócimy tak, by ramię prostujące $l \equiv GH = 0$ zerowało się, to wykonamy maksymalną pracę, tj. okręt osiągnie maksimum energii potencjalnej. Ponieważ może istnieć tylko jedno maksimum, musi być ono niezależne od wyboru osi referencyjnej. Stąd, jeśli zakresy krzywych ramion są różne dla różnych osi referencyjnych, jak to jest w przypadku platform, to w części opadającej muszą się ze sobą przecinać. Różnice pomiędzy nimi nie są jednak duże.

Aby ramiona prostujące były takie same dla różnych osi referencyjnych przy tych samych kątach analitycznych φ i θ, osie obrotu ***e*** musiałyby być takie same, co jest możliwe, jeśli uwzględnimy azymut. Takie same byłyby też ramiona dynamiczne l_d w położeniu równowagi, oraz kąty obrotu η płaszczyzny obrotu, co wynika ze wzoru (47) na pracę momentu.

Wybór osi referencyjnej wpływa ponadto na orientację osi pływania ***f***, wokół której odbywa się chwilowy obrót wodnicy, co tym samym definiuje kinematykę statku. Oś ta nachylona jest względem osi obrotu ***e*** pod kątem χ, danym wzorem (32).

W przypadku osi *Ox'*, przyjmowanej powszechnie do obliczeń, kąt obrotu η nie ma prostej interpretacji geometrycznej. Wynika to z faktu, że oś referencyjna *nie* jest normalna do płaszczyzny obrotu (wręgu pionowego). Pomiędzy kątem przechyłu statku i kątem obrotu płaszczyzny obrotu zachodzi wzór $d\eta = d\varphi\cos\Theta$, czyli $\eta = \int\cos\Theta d\varphi$. Wynika z niego, że $\eta < \varphi$, i że dla $\varphi = 90°$, kąt obrotu $\eta < 90°$. W przypadku statku kąty η i φ są praktycznie tożsame, gdyż przegłębienia są poniżej 1°. W przypadku platform, różnice między tymi kątami mogą być spore,

ze względu na możliwe duże przegłębienia. Różniczkę $d\eta$ można obliczać też ze wzoru (27). Wynika z niego, że elementarny obrót $d\eta > 0$. Oznacza to, że kąt przegłębienia $\Theta < 90°$ nie może osiągnąć 90°. Inaczej mówiąc, podczas przechylania platforma nie może stanąć „dęba".



Rys. 18. Widok z góry na statek w przechyle $\phi = 90°$

Ciekawy przypadek statku przechylonego o 90° pokazuje Rys. 18, gdzie w jaskrawy sposób widać różnice pomiędzy różnymi osiami referencyjnymi. W przypadku osi referencyjnej *Oy* dla kąta $\phi = 90°$, PS jest pozioma, a płaszczyzna obrotu przechodzi przez środek ciężkości i środek wyporu, czyli statek jest wzdłużnie zrównoważony. Ponieważ płaszczyzna ta jest nieruchoma w przestrzeni, cały rysunek należałoby obrócić poziomo wokół punktu *G* (w tym przypadku w lewo) o kąt odchylenia od osi *z*, by płaszczyzna obrotu była pionowa na rysunku. Ramię prostujące jest ujemne, równe poziomej odległości pomiędzy punktami *G* i *F*. Położenia tego statek może nie osiągnąć z braku zrównoważenia wzdłużnego, co wynika ze wzoru (42).

Dla osi *Ox* i *Oz* płaszczyzna obrotu na Rys. 18 przechodzi przez punkt *G* równolegle do osi *z*. Ponieważ środek wyporu nie znajduje się w tej płaszczyźnie, statek przegłębiłby się tak (w tym przypadku na dziób), by znalazł się w płaszczyźnie obrotu. Kąt przechyłu byłby nadal równy $\varphi = \alpha = 90°$. Ramię prostujące byłoby równe poziomej odległości pomiędzy środkiem ciężkości i przemieszczonym środkiem wyporu. Dla osi *x*, kąt obrotu płaszczyzny obrotu $\eta < 90°$, byłby mniejszy od 90°, lecz różnica byłaby znikoma, nawet dla większych przegłębień. Tak więc, te dwie krzywe ramion zbiegają się dla 90° przechyłu.

Gdy linią węzłów jest ślad wody na owrężu, oś obrotu $\boldsymbol{e}$ dana jest wzorem (21). Podstawiając za $\boldsymbol{n}$ wyrażenie dane wzorem (56), otrzymamy wersor:

$$\boldsymbol{e} = (\cos\Theta,\ -\sin\Theta\sin\varphi,\ \sin\Theta\cos\varphi) \tag{57}$$

normalny do linii węzłów (wersora $\boldsymbol{e}_2$ na Rys. 9), równoległy do osi ξ'' po obrocie układu centralnego $\xi'\eta'$ (nie pokazany na Rys. 17) o kąt $\beta' = \beta - 90°$. Oś ξ'' jest wówczas normalna do linii węzłów $\boldsymbol{e}_2$, a oś η'' – równoległa. Łatwo sprawdzić, że $\partial\boldsymbol{e}/\partial\Theta = \boldsymbol{n}$, jak we wzorze (41), gdzie wersor $\boldsymbol{n}$ dany jest wzorem (56).

Gdy linią węzłów jest ślad wody w PS, oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1$ pokrywa się ze śladem wody w PS, czyli $\boldsymbol{e} = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$. Można sprawdzić, że $\partial\boldsymbol{e}/\partial\theta = \boldsymbol{e}\times\boldsymbol{j}$, jak we wzorze (41).

Gdy linią węzłów jest ślad na wodnicy pierwotnej, oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{w}$ pokrywa się ze śladem wody na wodnicy pierwotnej, gdzie $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{n}/\sin\alpha$, stąd wynika wzór:

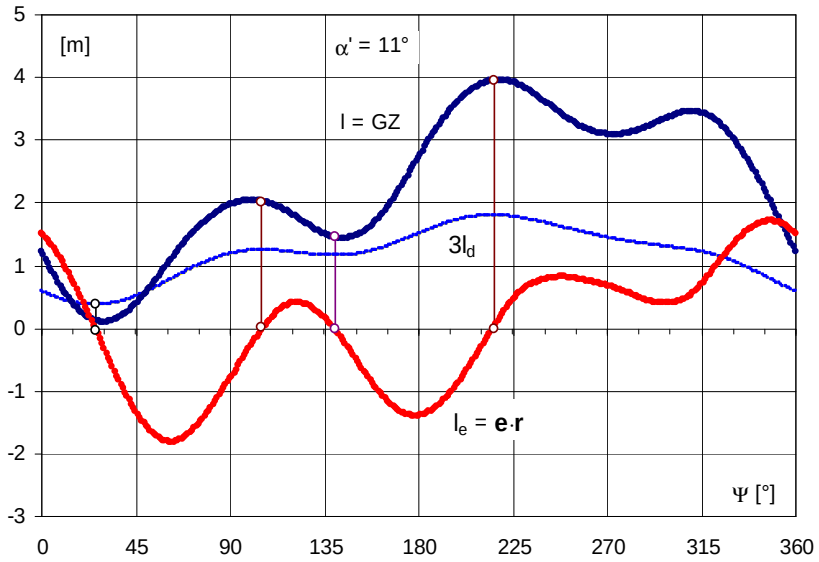
$$\boldsymbol{e} = (\cos\vartheta,\ \sin\vartheta,\ 0) \tag{58}$$

który otrzymaliśmy już wcześniej, patrz wzór (20). Gdy w położeniu wyprostowanym statek jest przegłębiony, kąty α i ϑ zastępujemy kątami α' i ϑ'. Gdy wodnica jest symetryczna (nieuszkodzona) oś ta pokrywa się ze śladem PS na wodnicy pierwotnej, wówczas $\vartheta' = 0$, Łatwo sprawdzić, że $^{\partial}/_{\partial\vartheta}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{e}$, jak we wzorze (41).

W przypadku platform półzanurzeniowych, ze względu na mały stosunek $L/B < 2$, przepisy wymagają badania stateczności przy różnych ustawieniach w stosunku do kierunku wiatru, czyli przy różnej orientacji płaszczyzny naporu wiatru względem PS, zmieniającej się od 0° do 360°. Chodzi tu nie tyle o krzywą ramion, co o moment przechylający, zależny od ustawienia platformy względem wiatru (powierzchnia nawiewu dramatycznie zmienia się w trakcie przechylania). Obliczanie momentu od wiatru nie nastręcza problemu, jeśli nie liczyć pracochłonności. Są natomiast problemy z interpretacją krzywej ramion dla obiektu swobodnie pływającego.

Ze wzorów (18) i (19) wynika, że składowa poprzeczna l i wzdłużna l_e ramienia pary sił są funkcją kąta przechyłu α' i kąta skręcenia $\Psi = \psi + \vartheta'$. Skręcenie $\Psi = \Psi(\alpha')$ jest funkcją kąta przechyłu, którą otrzymuje się z równoważenia wzdłużnego, czyli rozwiązania równania $l_e(\alpha', \Psi) = 0$.

Wykresem funkcji dwóch zmiennych $l_e = l_e(\alpha', \Psi)$ jest powierzchnia. Rozwiązaniem na funkcję $\Psi = \Psi(\alpha')$ są krzywe, jakie wynikają z przecięcia tej powierzchni płaszczyzną $l_e = 0$. Dla zadanego kąta przechyłu $\alpha' = const$ może więc istnieć jedynie dyskretna liczba kątów skręcenia Ψ, w których platforma jest wzdłużnie zrównoważona. Kąty te można łatwo znaleźć robiąc wykres $l_e = l_e(\alpha', \Psi)$ dla ustalonego kąta α', jak na Rys. 19, wykonanym dla platformy II, badanej w rozdziale 7. Jak widać, dla zadanego kąta przechyłu $\alpha' = 11°$ istnieją cztery kąty skręcenia Ψ,



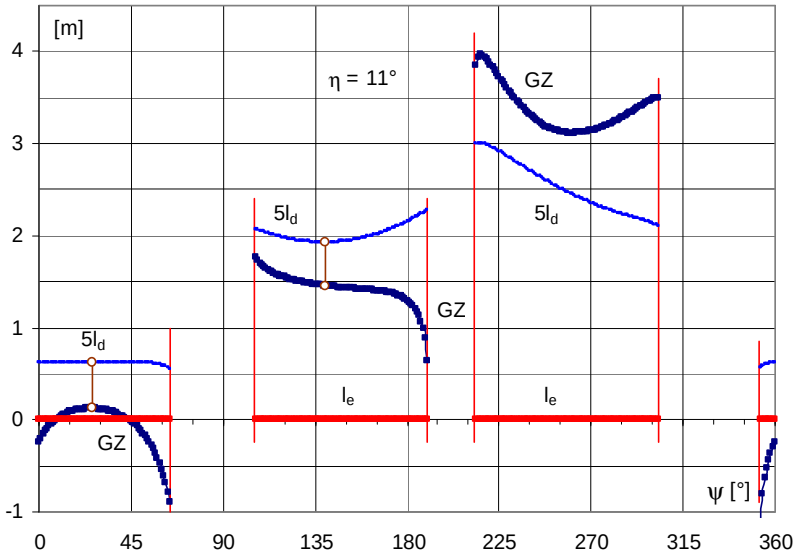
Rys. 19. Przebieg poprzecznej i wzdłużnej składowej ramienia prostującego l i dynamicznego l_d platformy II w funkcji kąta skręcenia Ψ, dla zadanego kąta przechyłu α'

odpowiadające naprzemiennie minimum i maksimum stateczności. Pierwszy kąt dotyczy minimum absolutnego, a ostatni maksimum absolutnego. W dowolnym przypadku, pierwszy i trzeci pierwiastek są symetryczne względem kąta 90°, co można udowodnić ściśle. Te cztery kąty równowagi wskazują, że dla obiektu swobodnie pływającego w grę wchodzą tylko dwa ustawienia osi obrotu ***e***, gdy w położeniu początkowym pokrywa się z jedną lub drugą główną osią bezwładności wodnicy początkowej. To pierwsze ustawienie jest najgorsze, tj. daje krzywą o najmniejszych ramionach. Gdy wodnica jest niesymetryczna, przechyły muszą odbywać się na stronę wstępnego przechyłu. W drugim ustawieniu mamy niestateczne „przechyły" wzdłużne, o maksymalnej energii potencjalnej. Przy innych ustawieniach występują przedziały kątów, przy których jednostki nie da się zrównoważyć wzdłużnie, tym samym w przedziałach tych krzywa ramion jest nieokreślona.

Tymczasem przepisy wymagają, by stateczność platform badać przy różnych ustawieniach względem kierunku wiatru, opisanych azymutem $\psi \in \langle 0°, 360° \rangle$, zmieniającym się co 5°. Azymut liczony jest względem osi obrotu ***e***, prostopadłej do kierunku wiatru. Z wyjątkiem tych

czterech wspomnianych ustawień, czyli ψ = 0°, 90°, 180° i 270°, w pozostałych przypadkach, jeśli statek ma być wzdłużnie zrównoważony, w przypadku osi referencyjnej *Oz'* krzywe ramion są takie same, jak dla azymutu ψ = 0, a w przypadku pozostałych osi referencyjnych, ramiona prostujące *wzrastają*, osiągając maksymalne wartości dla azymutu ψ = 90° i 270°. Okupione jest to jednak występowaniem coraz dłuższych przedziałów, w których statku nie da się wzdłużnie zrównoważyć (Rys. 20). Rysunek ten, identyczny dla osi referencyjnych *Ox''* i *Oy'*, pokazuje jednocześnie wpływ azymutu na ramię prostujące $l \equiv GZ$ i ramię dynamiczne l_d dla ustalonego kąta przechyłu η = 11°. Warto zwrócić uwagę, że minima ramienia dynamicznego l_d mają te same wartości i wypadają przy tym samym azymucie, niezależnie od osi referencyjnej.

Tym niemniej, zgodnie z przepisami, krzywe ramion liczone są dla dowolnych azymutów. Jest to możliwe, gdy platforma nie jest równoważona wzdłużnie lub jest źle równoważona. Jeśli stosunek *L*/*B* jest zbyt mały, brak zrównoważenia wzdłużnego może wystąpić także dla przechyłów wokół osi wzdłużnej, co uniemożliwia wyznaczenie krzywej ramion. Brak zrównoważenia nie oznacza jednak, że platforma staje „dęba", co twierdzi się w publikacjach American Bureau of Shipping [23, 24]. Samo zjawisko określa się tam jako *orthogonal tipping*, i mówi się o zaniku stateczności (ang. *fading stability*), w odróżnieniu od utraty stateczności poprzecznej



Rys. 20. Przebieg ramienia prostującego $l \equiv GZ$ oraz dynamicznego l_d platformy II w funkcji azymutu Ψ, dla zadanego kąta przechyłu η

(ang. *vanishing stability*). Maksymalne przegłębienie, co do wartości absolutnej, zależy od zadanego kąta przechyłu, nie przekraczając zazwyczaj kilkunastu stopni. Przykładowo, dla platformy II, dla kąta α′ = 6° kąt θ > −9,83°, a dla α′ = 11° kąt θ > −15,21°. *Orthogonal tipping* nie występuje w rzeczywistości, co jest oczywiste w świetle metody Kryłowa–Dargniesa.

6. KRZYWA RAMION MINIMALNEJ STATECZNOŚCI

Jak wspomniano poprzednio, większość momentów przechylających, w tym moment od wiatru, jest równoległa do PS, stąd statek swobodnie pływający ustawia się w taki sposób, by ślad wody w PS był normalny do płaszczyzny obrotu. W przypadku platform, przy dowolnym ustawieniu względem wiatru, moment od wiatru jest równoległy do płaszczyzny naporu wiatru, prostopadłej do kierunku wiatru w położeniu wyprostowanym i obracającej się razem z platformą. Tym samym, moment jest równoległy do śladu wody w płaszczyźnie naporu, a płaszczyzna obrotu

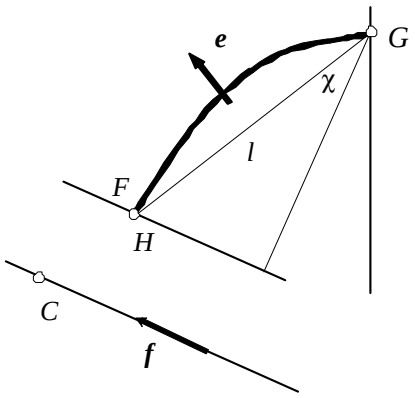
jest prostopadła do tego śladu. Powstaje zatem pytanie, jak przechyla się statek, gdy kierunek momentu nie jest związany z orientacją względem statku?

Aby jednoznacznie odpowiedzieć na to pytanie, trzeba znać mechanizm przechylania się statku w przypadku *swobodnego* momentu przechylającego, tj. momentu, jaki pojawia się np. przy dowolnym przesunięciu ciężaru czy przyjęciu go w dowolnym miejscu. Odpowiedź jest prosta: statek ustawia się tak, by energia potencjalna po przechyle była minimalna, inaczej mówiąc, by praca związana z przechyleniem statku była jak najmniejsza. Wiemy, że własność tę posiada statek swobodnie pływający, wzdłużnie zrównoważony. Dla zadanego kąta przechyłu jest tylko jedno położenie równowagi $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} = 0$, któremu odpowiada minimum energii, niezależne od osi referencyjnej.

Praca jest proporcjonalna do ramienia dynamicznego, stąd minimum energii potencjalnej odpowiada minimum ramienia dynamicznego l_d, danego wzorem (48), ważnym w każdym przypadku. Z klasycznej teorii okrętu wiadomo, że ramię dynamiczne zależy od przebiegu promieni metacentrycznych w funkcji kąta przechyłu, co dla statku swobodnie pływającego oznacza w funkcji kąta obrotu płaszczyzny obrotu. Tak więc, w ogólnym przypadku:

$$l_d = \int_0^{\eta} r_F \sin(\eta - \nu) d\nu - a(1 - \cos\eta) \tag{59}$$

gdzie ν jest niemą zmienną całkowania, zmieniającą się od 0 do η (zadanego kąta obrotu płaszczyzny obrotu), r_F jest promieniem metacentrycznym w płaszczyźnie obrotu, danym wzorem (28), zaś $a = F_0G$, jest stałą. Jest oczywiste, że o minimum ramion dynamicznych decyduje wyrażenie całkowe w powyższym wzorze, które jest minimalne dla najmniejszych promieni metacentrycznych w funkcji kąta obrotu η. Te zaś występują wtedy, gdy kąt χ odchylenia osi pływania $\boldsymbol{f}$ od osi obrotu $\boldsymbol{e}$, określony wzorami (44) lub (45), jest możliwe mały, co ma miejsce, gdy azymut $\psi = 0$, i gdy statek jest wzdłużnie zrównoważony.



Rys. 21. Rzut krzywej środków wyporu na wodnicę

Inaczej mówiąc, statek przechyla się wokół chwilowej osi pływania $\boldsymbol{f}$, czyli toczy się po niekołowym stożku (*aksoidzie nieruchomej*), stycznym do wodnicy wzdłuż tworzącej, pokrywającej się z osią pływania. Środek wyporu F w układzie statku wędruje po krzywej przestrzennej, leżącej na powierzchni poziomego cylindra o zmiennym promieniu krzywizny, tworząc rodzaj linii śrubowej, przecinającej się pod pewnym kątem z nieruchomą płaszczyzną obrotu – duże koło na Rys. 3, 4 i 5). Linia ta, w każdym punkcie ma styczną, równoległą do odpowiadającej wodnicy i jest *ukośna* do osi pływania $\boldsymbol{f}$ (Rys. 21). Ramię prostujące $l \equiv GH$ jest cięciwą łuku, jaki tworzy rzut krzywej środków wyporu na płaszczyznę wody; oś obrotu $\boldsymbol{e}$ jest prostopadła do ramienia prostującego l, nachylona pod kątem χ względem osi pływania $\boldsymbol{f}$, danym wzorem (33), zaś ramię dynamiczne l_d jest przyrostem pionowej odległości pomiędzy punktami G i F.

Ramię prostujące $l \equiv GH$ znajduje się w pionowej płaszczyźnie obrotu, przechodzącej przez punkty G i F, nieruchomej w przestrzeni. Środek wyporu F przemieszcza się w płaszczyźnie obrotu po płaskiej krzywej środków wyporu, której promień metacentrycznym $r_F = J_T/V$, gdzie J_T jest poprzecznym momentem bezwładności wodnicy, danym wzorem (35), zależnym od charakterystyk wodnicy w układzie związanym z osią obrotu $\boldsymbol{e}$.

Krzywa ramion *minimalnej stateczności* jest tożsama z krzywą ramion statku swobodnie pływającego, związaną z osią referencyjną Oz'. Ramię prostujące dla ustalonego kąta przechyłu

odpowiada pierwszemu miejscu zerowemu krzywej $l_e \equiv \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r}$ w funkcji azymutu ψ (Rys. 19). Zgodnie z definicją, w miejscu tym wypada minimum absolutne energii potencjalnej, czyli ramienia dynamicznego l_d, wyraźnie widoczne na wspomnianym rysunku. Oś pływania $\boldsymbol{f}$ znajduje się pomiędzy osią obrotu $\boldsymbol{e}$ i główna osia bezwładności wodnicy ξ_1 (patrz rozdział 4.4).

Krzywe ramion dla osi referencyjnych *Ox*′, *Oy* mają najmniejsze wartości dla azymutu $\psi = 0$. Mają one jednakowe pola między kątem równowagi i zakresem stateczności, jak w przypadku osi *Oz*′, można więc je także uważać za krzywe minimalnej stateczności. Kierunek momentu prostującego dla tych osi referencyjnych, opisany osią obrotu $\boldsymbol{e}$, jest stały w przestrzeni. To samo dotyczy osi referencyjnej *Oz*′, choć w literaturze mówi się, że moment prostujący krzywej minimalnej stateczności ma zmienny kierunek w przestrzeni. Płaszczyzna obrotu (duże koło na Rys. 3, 4 i 5) jest stała w przestrzeni, to samo dotyczy więc osi obrotu $\boldsymbol{e}$, prostopadłej do niej.

Znamienną cechą krzywej ramion statku swobodnie pływającego, niezależnie od osi referencyjnej jest to, że w ogólnym przypadku oś obrotu $\boldsymbol{e}$ *nie pokrywa* się ani z główną osią bezwładności wodnicy ξ_1, ani z osią pływania $\boldsymbol{f}$. Dotyczy to także krzywych ramion związanych z płaszczyzną naporu wiatru.

Jeśli dla zadanego kąta przechyłu płaszczyzna naporu wiatru ma taki azymut ψ, że ramię dynamiczne l_d po zrównoważeniu osiąga minimum, to we wszystkich przypadkach nie tylko ramiona prostujące są takie same, równe minimalnej wartości, lecz także kąty obrotu η płaszczyzny obrotu. Równość kątów obrotu (przechyłu) wynika stąd, że płaszczyzna naporu wiatru przechodzi wówczas przez krawędź przecięcia się wodnicy pierwotnej z powierzchnią wody, zaś wręg pionowy jest prostopadły do tej krawędzi. Stąd, wynikają jednakowe kąty obrotu płaszczyzny obrotu

$$\eta = \phi' = \alpha'$$

niezależnie od linii węzłów, o czym dyskutowaliśmy już wcześniej. Zatem, gdy oś obrotu $\boldsymbol{e}$ dla danego kąta przechyłu odpowiada minimum ramienia dynamicznego l_d, istnieje tylko jedna minimalna wartość ramienia prostującego, niezależna od osi referencyjnej.

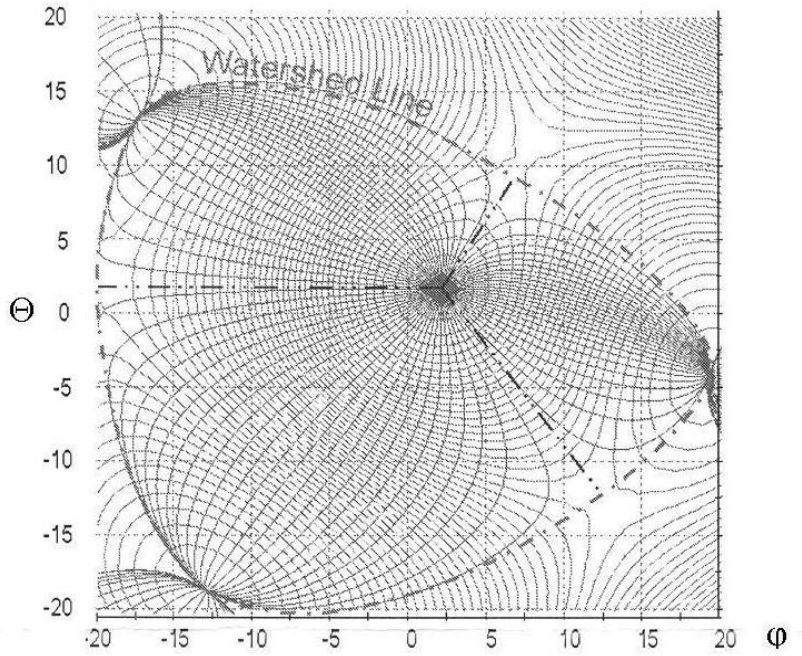
W publikacjach ABS [23, 24] krzywą ramion minimalnej stateczności otrzymuje się w oparciu o analizę ramienia dynamicznego l_d, w funkcji kątów Eulera φ i Θ, związanych z osią referencyjną *x*′. W tym celu sporządza się wykres warstwicowy ramienia dynamicznego l_d.= *const* w płaszczyźnie wspomnianych kątów (Rys. 22). Stosując metodę największego spadku (*ang*. *steepest descent path* – SDP) można znaleźć najmniejszą krzywą ramion dynamicznych, a tym samym, najmniejszą krzywą ramion prostujących. Obie krzywe są funkcją kąta obrotu płaszczyzny obrotu $\eta = \phi' = \alpha'$, o czym autorzy nie wspominają.

Metoda największego spadku jest zawiła, pracochłonna (wymaga setek punktów obliczeniowych dla statku niezrównoważonego wzdłużnie) i całkowicie oderwana od mechanizmu przechyłów o najmniejszej pracy. Niemniej, jest równoważna krzywej ramion dla obiektu swobodnie pływającego, o najmniejszej stateczności, jak dla osi referencyjnej *Oz*′.

Inną możliwością obliczeń krzywej ramion obiektu swobodnie pływającego jest metoda *free twist*, stosowana przez van Santena w pracach [20, 21]. W metodzie tej poszukuje się takiej osi obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{w}$ na wodnicy pierwotnej, by po obrocie statku o zadany kąt α' ramię prostujące *l* było do niej prostopadłe. Wynikiem jest krzywa ramion związana z osią referencyjną *Oz*′. Postępowanie to nie jest zbyt efektywne, zwłaszcza dla dużych kątów przechyłu.

Krzywą ramion minimalnej stateczności najprościej wyznacza się jak dla statku swobodnie pływającego, dla osi referencyjnej *Oz*′, gdyż jest z nią tożsama. Dla zadanego kąta przechyłu φ lub α' znajdujemy iteracyjnie przegłębienie θ lub ϑ', przy którym statek jest wzdłużnie zrównoważony, tj. $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r} = 0$, gdzie oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{w}$ i wersor $\boldsymbol{n}$ podane są wzorami (20). Znajomość kątów

Eulera, tj. kąta przechyłu i przegłębienia, definiuje wersor ***n***, a ten z kolei definiuje kąty analityczne φ i θ, co pozwala wyznaczyć charakterystyki geometryczne kadłuba.



Rys. 22. Metoda największego spadku

Krzywą ramion minimalnej stateczności można znaleźć też przy pomocy płaszczyzny naporu wiatru, opisanej azymutem ψ. W grę wchodzą dwie osie referencyjne *Ox*″ i *Oy*′. Dla tej pierwszej, oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_2' \times \boldsymbol{n}$, gdzie wersory $\boldsymbol{e}_2'$ i ***n*** podane są wzorami (14) i (15), dla drugiej, oś obrotu $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1'$ i wersor ***n*** podane są wzorami (16) i (17). Wersor ***n*** definiuje kąty analityczne φ i θ, co pozwala wyznaczyć charakterystyki geometryczne kadłuba. Wersor ten zależy od trzech stopni swobody, dochodzi bowiem azymut ψ, zaś wersor osi obrotu ***e*** od dwóch (w przypadku osi *Ox*″) lub trzech (w przypadku osi *Oy*′). Zatem, warunek zrównoważenia wzdłużnego $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} = 0$, dla zadanego kąta przechyłu i azymutu, wyznacza przegłębienie równowagi. Znając trzy stopnie swobody, możemy obliczyć ramię prostujące *l* i dynamiczne l_d. Przykładowy wykres tych wielkości, dla zadanego kąta przechyłu w funkcji azymutu, pokazany jest na Rys. 20. Zwraca uwagę to, że w pewnych przedziałach azymutu nie da się zrównoważyć badanej platformy, a tym samym wyznaczyć charakterystyk stateczności.

Wykresy na Rys. 20 dotyczą osi *Ox*″. Analogiczny wykres dla osi *Oy*′ jest praktycznie taki sam, różnice są niedostrzegalne. Pierwsze minimum krzywej l_d (w tym przypadku, ze względu na niemal stałą wartość, można skorzystać z maksimum *GZ*) wyznacza ramię prostujące krzywej minimalnej stateczności dla przechyłu $\alpha' = 11°$ w stronę wstępnego przechyłu, zaś drugie minimum – ramię prostujące dla tego samego przechyłu w przeciwną stronę. Wartości te, jako wielkości fizyczne, nie zależą od osi referencyjnych. Tak więc, osie referencyjne *Ox*″, *Oy*′ i *Oz*′ mają wspólną krzywą minimum stateczności. Wspólna jest wówczas oś obrotu ***e***. Tę ostatnią krzywą (dla osi referencyjnej *Oz*′) łatwo znaleźć za pomocą rutynowych obliczeń.

Wyznaczanie krzywej ramion statku swobodnie pływającego jest pracochłonne, gdyż oprócz iteracyjnego równoważenia wyporności dochodzi równoważenie wzdłużne. Pracochłonność tę można radykalnie zmniejszyć, jeśli zastosuje się metodę Kryłowa–Dargniesa, która w naturalny sposób śledzi ruchy osi pływania ***f*** podczas przechylania statku. W metodzie tej nowe położenie statku znajduje się bez jakichkolwiek iteracji, wykorzystując własności różniczkowe wodnic równoobjętościowych.

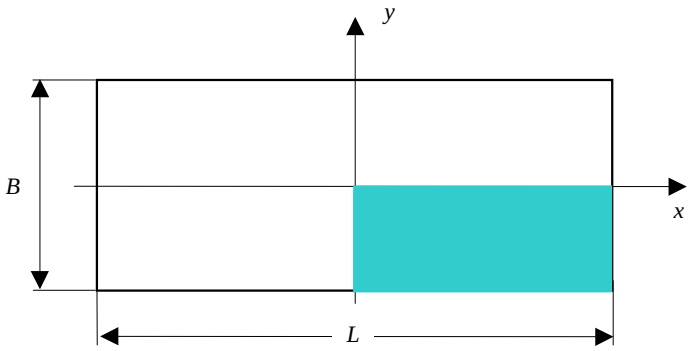
Jeśli przyjąć, że do znalezienia właściwej wyporności i przegłębienia potrzeba średnio $4 \div 5$ iteracji, to do wyznaczenia jednego punktu krzywej ramion statku swobodnie pływającego potrzeba średnio $4^2 \div 5^2 = 16 \div 25$ iteracji. Metoda Kryłowa–Dargniesa byłaby więc $16 \div 25$ razy szybsza niż metody wypornościowe, co warte jest zachodu.

7. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Wg przedstawionej teorii obliczeń krzywej ramion statku swobodnie pływającego zmodyfikowany został program WinSEA, używany w Polskim Rejestrze Statków do obliczeń stateczności statku. Modyfikacji dokonał autor programu dr Andrzej Laskowski. Użytkownik ma do wyboru trzy opcje obliczeń: 1) "inżynierską", związaną z osią *Ox′* lub *Ox″*, 2) "fizyczną", związaną z osią *Oy* lub *Oy′*, i 3) "naturalną", związaną z osią *Oz′*, tożsamą z krzywą ramion minimalnej stateczności. Jest też zerowa opcja "maksimum stateczności", dla statku o stałym przegłębieniu, normalnie niestosowana.

Obliczenia dla statków konwencjonalnych pokazują, że wybór osi referencyjnej nie ma znaczenia. Wynika to stąd, że dla występujących przegłębień kąt β między śladami wody w PS i na owrężu niewiele różni się od kąta prostego. Daje to takie same osie obrotu, niezależnie od osi referencyjnej. W początkowym zakresie stateczności, do kąta wejścia pokładu do wody, wszystkie opcje są praktycznie tożsame. Powodem są małe kąty γ, nawet dla dużej asymetrii wodnicy. Dobrze ilustruje to poniższy przykład.

PRZYKŁAD. Rozpatrzmy wodnicę prostokątną, która w stanie awaryjnym utraciła ¼ swego pola, jak na Rys. 23. Pole wodnicy $A = \frac{3}{4}LB$.



Rys. 23

Moment dewiacyjny daje jedynie ćwiartka wodnicy nad częścią uszkodzoną, stąd:

$$D = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}L)^2\,\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}B)^2 = \tfrac{1}{64}(LB)^2$$

Obliczając momenty statyczne łatwo znajdziemy współrzędne środka ciężkości wodnicy: $x_C = -\tfrac{1}{12}L$, $y_C = \tfrac{1}{12}B$. Momenty bezwładności wodnicy wynoszą więc:

$$J_x = \tfrac{1}{12}LB^3 - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}L)(\tfrac{1}{2}B)^3 = (\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{48})LB^3 = \tfrac{1}{16}LB^3$$
$$J_y = \tfrac{1}{16}BL^3$$

Stosując wzory Steinera, otrzymamy charakterystyki centralne wodnicy:

$$J_{x'} = J_x - Ay_C^2 = \tfrac{1}{16}LB^3 - \tfrac{3}{4}LB(\tfrac{1}{12}B)^2 = \tfrac{11}{12}\tfrac{1}{16}LB^3$$
$$J_y = J_y - Ax_C^2 = \tfrac{11}{12}\tfrac{1}{16}BL^3$$
$$D' = D - Ax_Cy_C = \tfrac{1}{64}(LB)^2 - \tfrac{3}{4}LB(-\tfrac{1}{12}L)\tfrac{1}{12}B = (\tfrac{1}{64} + \tfrac{3}{4}\tfrac{1}{12}\tfrac{1}{12})(LB)^2 = \tfrac{1}{48}(LB)^2$$

Promień przedziału bezwładności $a' = \frac{1}{2}(J_x - J_y) = \frac{1}{2}\frac{11}{12}\frac{1}{16}(LB^3 - BL^3) = \frac{11}{24}\frac{1}{16}(\frac{B}{L} - \frac{L}{B})(LB)^2$, stąd główne osie bezwładności obrócone są o kąt γ, dany wzorem (25):

$$\operatorname{tg} 2\gamma = -D'/a' = -\frac{1}{48}(LB)^2 16\,\frac{24}{11}/(\frac{B}{L} - \frac{L}{B})(LB)^2 = \frac{8}{11}/(\frac{L}{B} - \frac{B}{L})$$

Gdy kąt jest dodatni, obrót osi jest przeciwny do wskazówek zegara. Dla typowego $L/B = 6$, daje to kąt równy zaledwie $\gamma = 3{,}55°$, mimo że asymetria wodnicy jest maksymalna. Tłumaczy to, dlaczego krzywa ramion o minimalnych wartościach w początkowym zakresie stateczności nie może istotnie różnić się od pozostałych reżimów obliczeniowych. Ze wzoru wynika ponadto, że kąt γ istotnie zależy od stosunku L/B. Gdy stosunek ten maleje, kąt γ wzrasta. Przykładowo, dla $L/B = 3$, kąt $\gamma = 7{,}63°$, a dla $L/B = 1$, $\gamma = 45°$. Tym samym, różnice między poszczególnymi opcjami obliczeniowymi wzrastają. Krzywa ramion o minimalnych wartościach ma zatem szczególne znaczenie dla platform, dla których $L/B \approx 1$, małych jednostek, dla których $L/B = 2{,}5 \div 4$, a dla normalnych statków – w stanie awaryjnym.

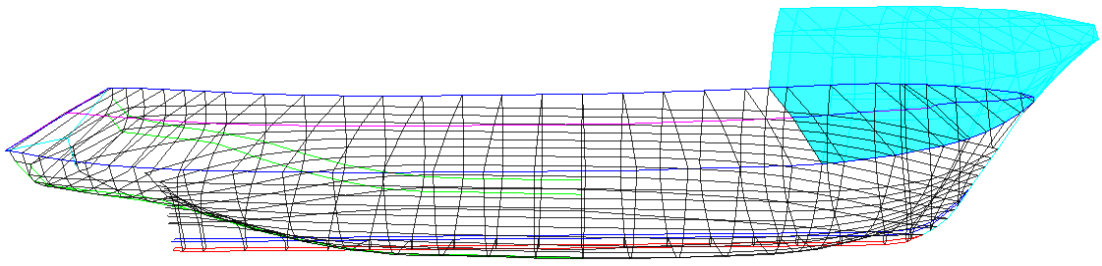
Dla ilustracji, wykonano obliczenia krzywych ramion prostujących wg wspomnianych opcji obliczeniowych dla czterech statków: kutra rybackiego oraz barki w stanie normalnym i uszkodzonym, a także dla dwóch platform samopodnośnych w stanie uszkodzonym.

7.1. Statki

Wymiary główne kutra są następujące:

długość między pionami ..... $L_{pp} = 23{,}9$ m,
szerokość ..... $B = 6$ m,
wysokość boczna ..... $H = 3{,}1$ m,
zanurzenie konstrukcyjne ..... $T = 2{,}7$ m,
współczynnik pełnotliwości kadłuba ..... $\delta = 0{,}63$.

Kształt kutra pokazany jest na Rys. 24, krzywe ramion kutra – na Rys. 25, zaś przebieg przegłębień na Rys. 26 i Rys. 27. Kuter ma rufę pawężową o dość długim nawisie i dużą dziobówkę.

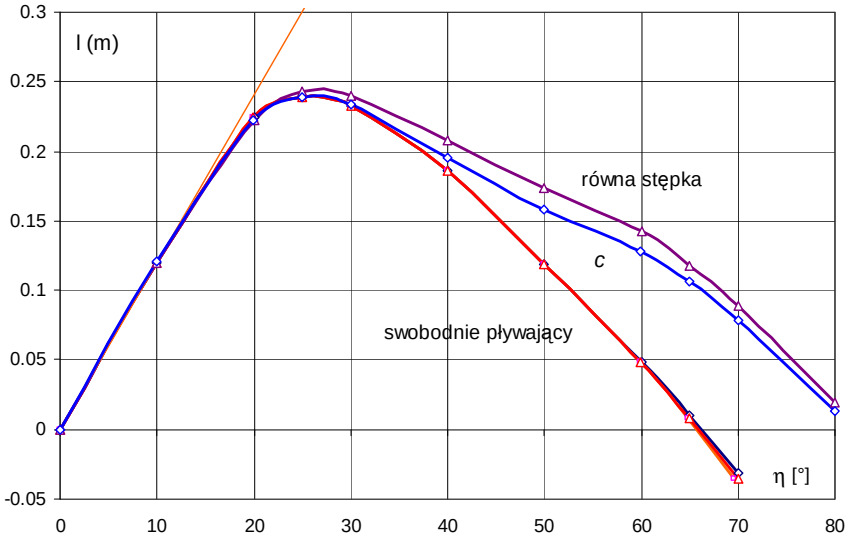


Rys. 24. Kształt badanego kutra

Obliczenia wykonane zostały dla statku nieuszkodzonego w niepełnym stanie załadowania, przegłębionego na rufę, wg trzech opcji obliczeniowych dla statku swobodnie pływającego, zdefiniowanych osią referencyjną x', y i z' w funkcji odpowiedniego kąta przechyłu η. Ponadto, wykonano obliczenia dla statku ze stałym przegłębieniem, jak w położeniu równowagi (krzywa *c*), oraz na równej stępce.

Jak widać z Rys. 25, w początkowym zakresie przechyłów (do kąta η_{max}, przy którym występuje maksimum krzywej ramion) wszystkie opcje dają te same wyniki. Różnice występują powyżej η_{max}. Zgodnie z oczekiwaniami, największe wartości ramion w części opadającej ma statek na równej stępce, znacznie zawyżając zakres stateczności. Nieco mniejsze wartości ma

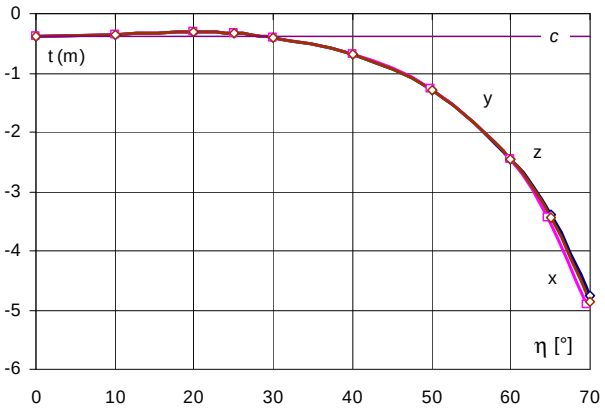
statek o stałym przegłębieniu, jakie występuje w położeniu równowagi (krzywa *c*). Obie krzywe zbiegają się, gdy kąt przechyłu dąży do 90°.



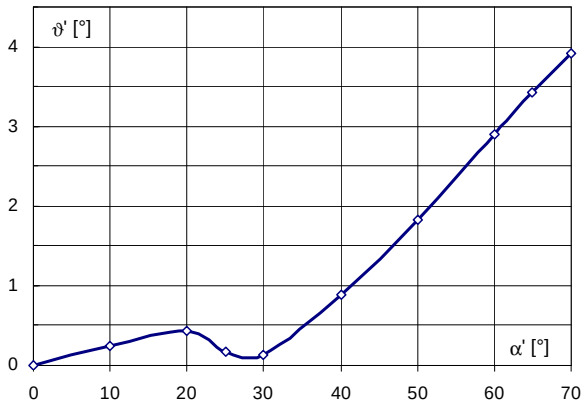
Rys. 25. Krzywe ramion prostujących kutra

Jak należało oczekiwać, krzywe ramion o najmniejszych wartościach ma statek swobodnie pływający, przy czym praktycznie nie zależą one od sposobu równoważenia, czyli wyboru osi referencyjnej. Przegłębienia po zrównoważeniu, mierzone w PS, są bowiem praktycznie takie same (Rys. 26), niezależnie od osi referencyjnej, co przekłada się na takie same osie obrotu ***e*** (kąty między nimi $\gamma_1 \approx \gamma_3 \approx 0$) i kąty obrotu płaszczyzny obrotu. Przegłębienia szybko narastają po przekroczeniu kąta 30°. Stąd, krzywa *c* do tego kąta pokrywa się z krzywymi ramion statku swobodnie pływającego, co dobrze widać na Rys. 25. Jak należało oczekiwać, krzywa *c* i krzywa dla statku na równej stępce zbiegają się. Krzywe z Rys. 25 przypominają przebieg krzywych z Rys. 1.

Przebieg kąta skręcenia (przegłębienia) wokół osi referencyjnej *Oz'* w funkcji kąta przechyłu dla kutra przechylanego na prawą burtę pokazany jest na Rys. 27. Jak widać, dla statku nieuszkodzonego kąt ten nie przyjmuje dużych wartości (w tym przypadku nie przekracza 4°), a dla przechyłów na lewą burtę skręt byłby taki sam, lecz przeciwnego znaku.



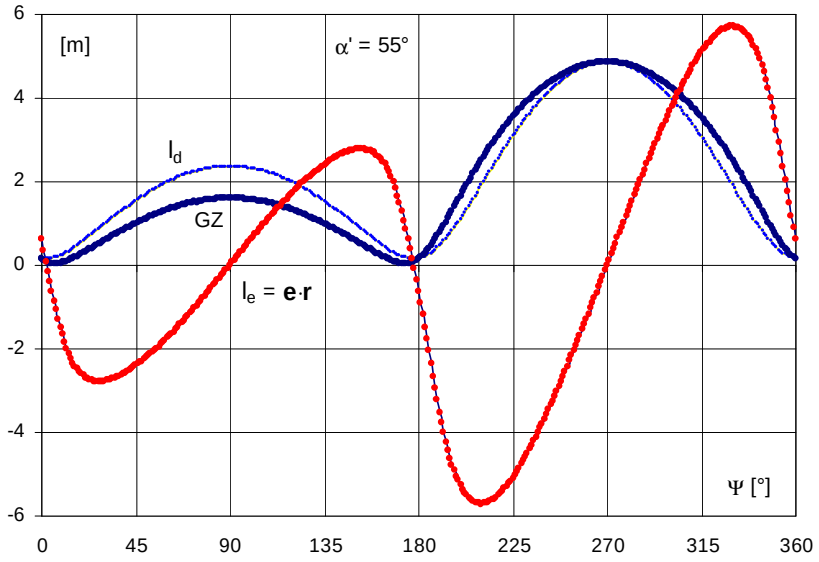
Rys. 26. Przebieg przegłębień kutra w PS, w zależności od osi referencyjnej



Rys. 27. Przebieg kąta skręcenia wokół osi *Oz'* podczas przechylania kutra

Przebieg charakterystyk stateczności kutra w funkcji kąta skręcenia Ψ dla wybranego kąta przechyłu $\alpha' = 55°$ pokazuje Rys. 28. Krzywe $l = GZ$ i l_d są symetryczne, a krzywa $l_e = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}$ antysymetryczna względem kąta $\Psi = 90°$ i 270°. Po obrocie o kąt $\Psi = 90°$ lub 270° PS pokrywa się

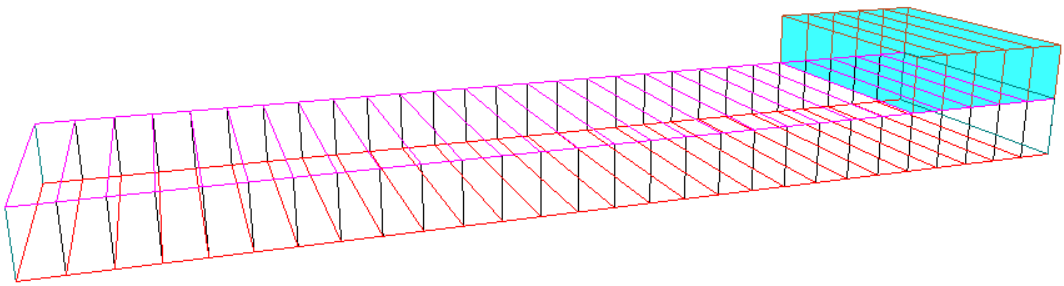
z płaszczyzną obrotu, co oznacza zrównoważenie wzdłużne statku. Ramię prostujące i ramię dynamiczne osiągają wtedy maksimum. Jest to cecha statków nieuszkodzonych, bez przechyłu wstępnego, posiadających PS. W przedziale $\Psi \in (0°, 180°)$ dziób jest pod wodą, a rufa nad wodą, w przedziale $\Psi \in (180°, 360°)$ jest na odwrót. W punkcie $\Psi = 0$, statek przechylony jest na prawą burtę, a w punkcie $\Psi = 180°$ – na lewą.



Rys. 28. Przebieg poprzecznej i wzdłużnej składowej ramienia prostującego oraz ramienia dynamicznego l_d kutra w funkcji kąta skręcenia Ψ, dla kąta $\alpha' = 55°$

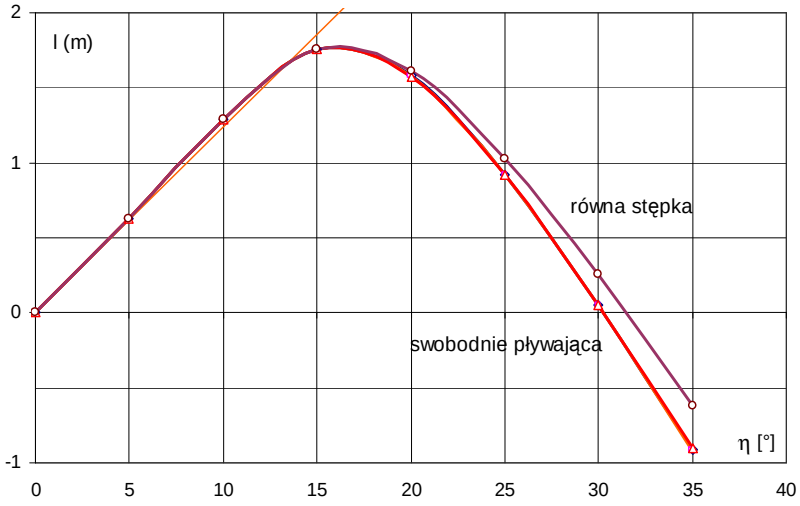
Warto zwrócić uwagę na krzywą $l_e = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}$, tj. wzdłużną składową ramienia prostującego l_e. Ze wzoru (42) wynika, że jej pochodna $\partial l_e / \partial \Psi = -H_{L\vartheta}$. Krzywa ta zmienia się oscylacyjnie względem kąta skrętu Ψ, co wskazuje na oscylacyjne zmiany wzdłużnej wysokości metacentrycznej $H_{L\vartheta}$. W miejscach ekstremalnych l_e wzdłużna wysokość metacentryczna zeruje się, tj. $H_{L\vartheta} = 0$. Zera krzywej l_e (Rys. 28) wyznaczają nie tylko ekstrema krzywej ramion dynamicznych i ramion prostujących, lecz są także punktami przegięcia, czyli ekstremami wzdłużnej wysokości metacentrycznej $H_{L\vartheta}$. W części rosnącej $H_{L\vartheta} < 0$, a w malejącej $H_{L\vartheta} > 0$. W pierwszym i trzecim położeniu równowagi, gdzie jest minimum energii potencjalnej, występuje równowaga trwała ($H_{L\vartheta} > 0$), a w drugim i czwartym (maksimum energii) – równowaga chwiejna ($H_{L\vartheta} < 0$).

Kuter jest małą jednostką. Zobaczmy, jak charakterystyki stateczności wyglądają dla dużej jednostki, jak barka, badana przez van Santena w publikacji [20], o wymiarach $L \times B \times H \times T$ = 140×36 ×8,5×5 m, KG = 17 m. Posiada ona dziobówkę o wymiarach $l \times h$ = 25×8 m (Rys. 29).



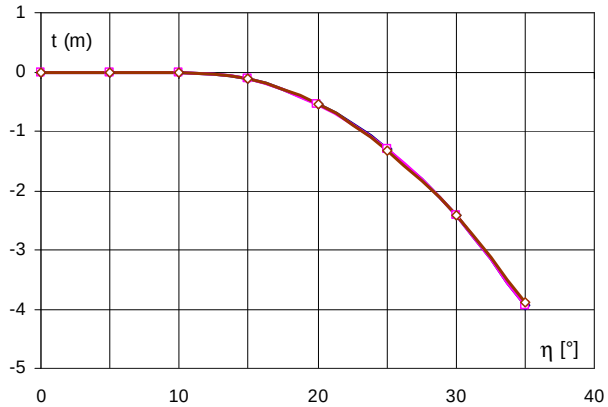
Rys. 29. Barka

Obie badane jednostki mają niemal taki sam stosunek L/B, bliski 4. Krzywe ramion barki pokazane są na Rys. 30, przebieg przegłębień na Rys. 31, zaś przebieg kąta skręcenia ϑ na Rys. 32.

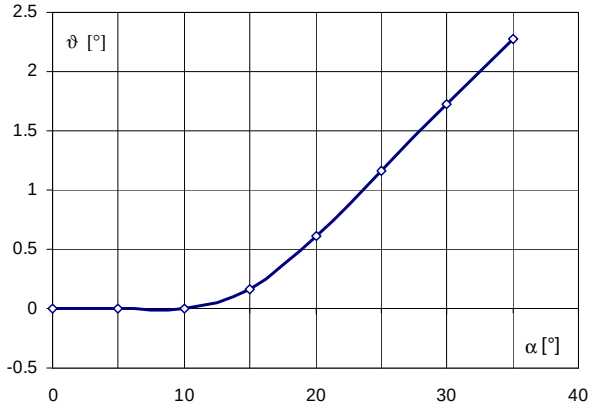


Rys. 30. Krzywe ramion prostujących barki

Jak w przypadku kutra krzywe ramion (Rys. 30) i przegłębienia *t* (Rys. 31) nie zależą od wyboru osi referencyjnej. Jednak, w odróżnieniu od kutra po wejściu pokładu do wody ($\eta = 11°$) różnice pomiędzy krzywą ramion dla statku na równej stępce i swobodnie pływającego są niewielkie. Wynika to z proporcjonalnie mniejszej dziobówki. Identyczny przebieg przegłębień, niezależny od wyboru osi referencyjnej, daje takie same kąty przechyłu dla różnych osi referencyjnych (różnice są rzędu setnych stopnia). Jak dla kutra, przegłębienia w kategoriach kątów są niewielkie, co potwierdza Rys. 32. Dla przechyłu $\alpha = 35°$, kąt skrętu wynosi zaledwie $\vartheta = 2{,}3°$. Dla jednostek symetrycznych, krzywe ramion dla przechyłów na drugą burtę są antysymetryczne. Przebieg charakterystyk stateczności barki w funkcji kąta skręcenia Ψ dla wybranego kąta przechyłu $\alpha = 20°$ pokazuje Rys. 33. Charakter tych krzywych jest analogiczny, jak dla kutra.

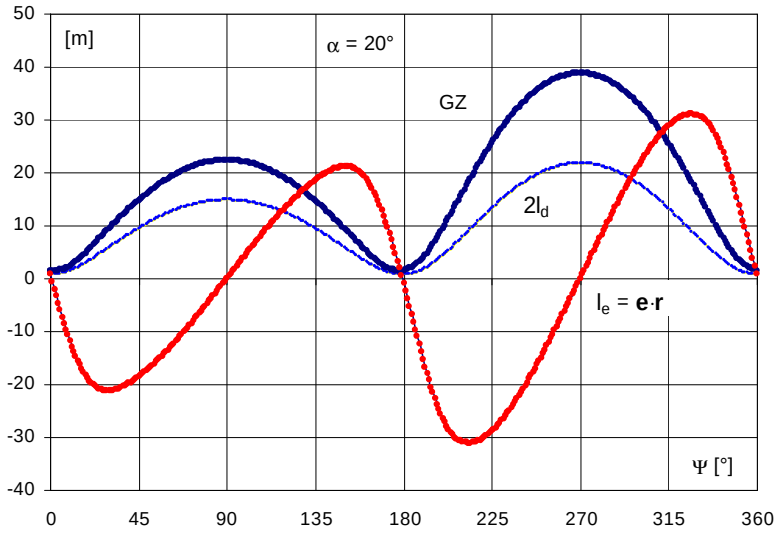


Rys. 31. Przebieg przegłębień barki w PS, w zależności od osi referencyjnej

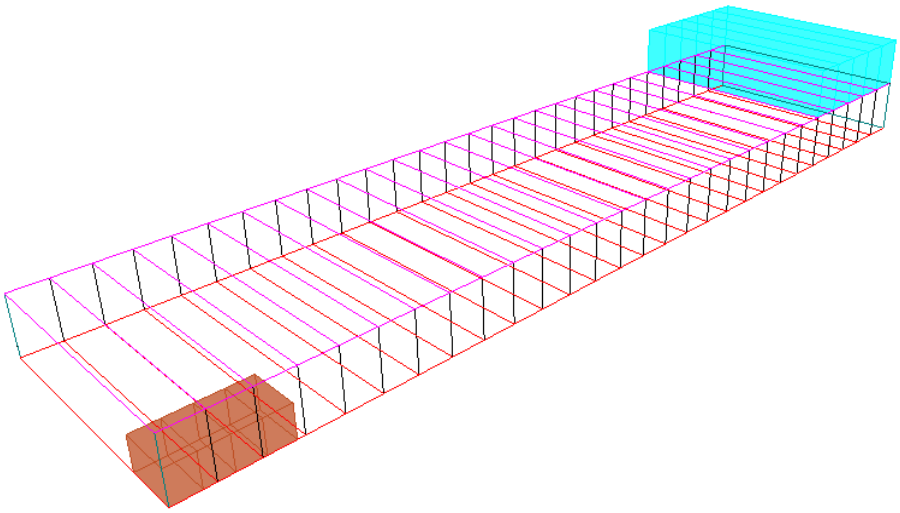


Rys. 32. Przebieg kąta skręcenia ϑ wokół osi *z* podczas przechylania barki

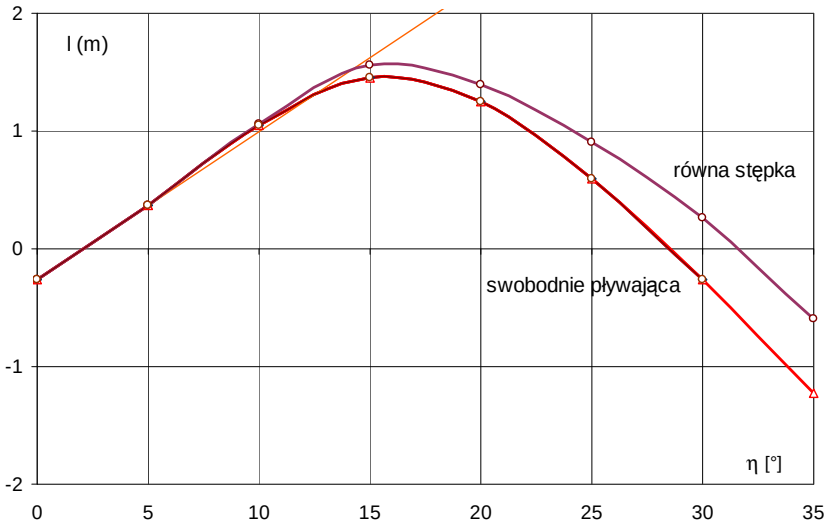
Dla celów porównawczych rozpatrzono także stateczność barki w stanie uszkodzonym, z zatopionym zbiornikiem o wymiarach $l \times b \times h = 14 \times 7{,}2 \times 4{,}5$ m, przylegającym do rufy, dna i prawej burty (Rys. 34). Także w tym przypadku, krzywe ramion oraz przegłębienia nie zależą od osi referencyjnej. Zwiększyła się jedynie różnica, w porównaniu do statku nieuszkodzonego, między krzywą ramion statku swobodnie pływającego, a krzywą statku na równej stępce (Rys. 35). W przypadku jednostek niesymetrycznie zatopionych, krzywe ramion na obie burty są różne, a na burtę przeciwną do wstępnego przechyłu są większe (Rys. 36).



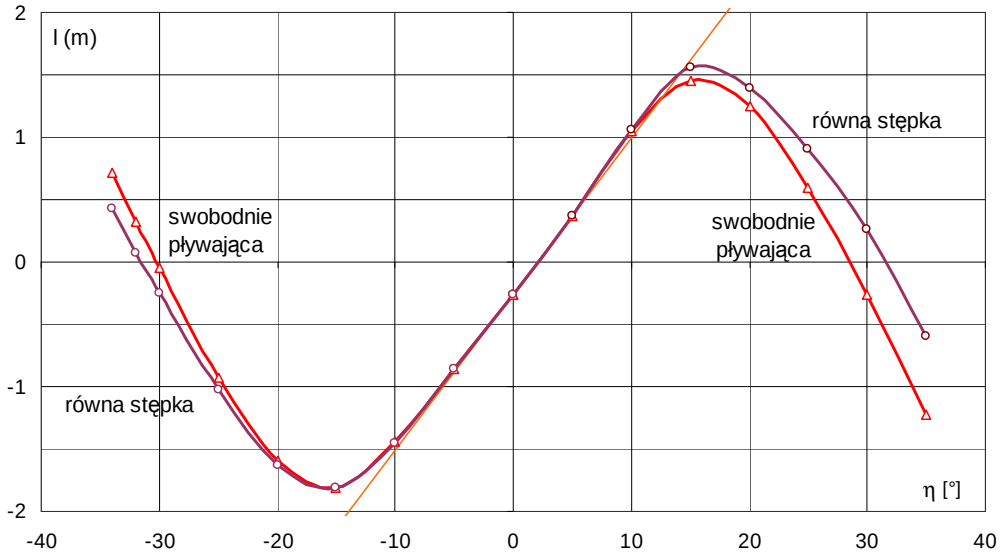
Rys. 33. Przebieg poprzecznej i wzdłużnej składowej ramienia prostującego oraz ramienia dynamicznego l_d barki w funkcji kąta skręcenia Ψ, dla ustalonego kąta α = 20°



Rys. 34. Uszkodzona barka



Rys. 35. Krzywe ramion prostujących barki w stanie uszkodzonym dla przechyłów na prawą burtę (w stronę wstępnego przechyłu)



Rys. 36. Krzywe ramion barki w stanie uszkodzonym dla przechyłów na obie burty

Przebieg kąta skręcenia ϑ' oraz charakterystyk stateczności barki uszkodzonej jest bardzo podobny do przebiegu pokazanego na Rys. 32 i Rys. 33, dlatego nie będziemy ich przytaczali. W obu przypadkach, dla dowolnego kąta przechyłu krzywa l_e posiada cztery miejsca zerowe, przy czym pierwszy i trzeci pierwiastek są symetryczne względem kąta 90°. Jak zobaczymy, są to warunki istnienia krzywej ramion statku swobodnie pływającego dla przechyłów na obie burty. Ze względu na wstępny przechył krzywa ramion dla osi referencyjnej Oz' jest nieokreślona w sąsiedztwie zera po stronie przeciwnej do wstępnego przechyłu. Według wzoru (43), przedział ten zaczyna się dokładnie w zerze, a kończy w punkcie $\alpha' = -0{,}10°$, co jest nie do zauważenia.

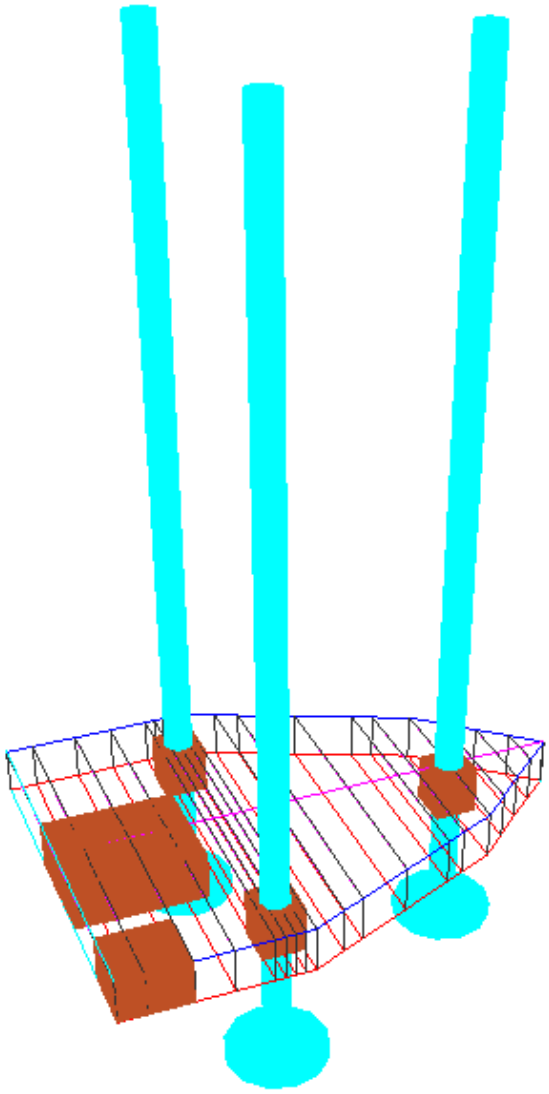
7.2. Platformy samopodnośne

Badane były dwie platformy samopodnośne I i II. Wymiary główne platformy I są następujące:

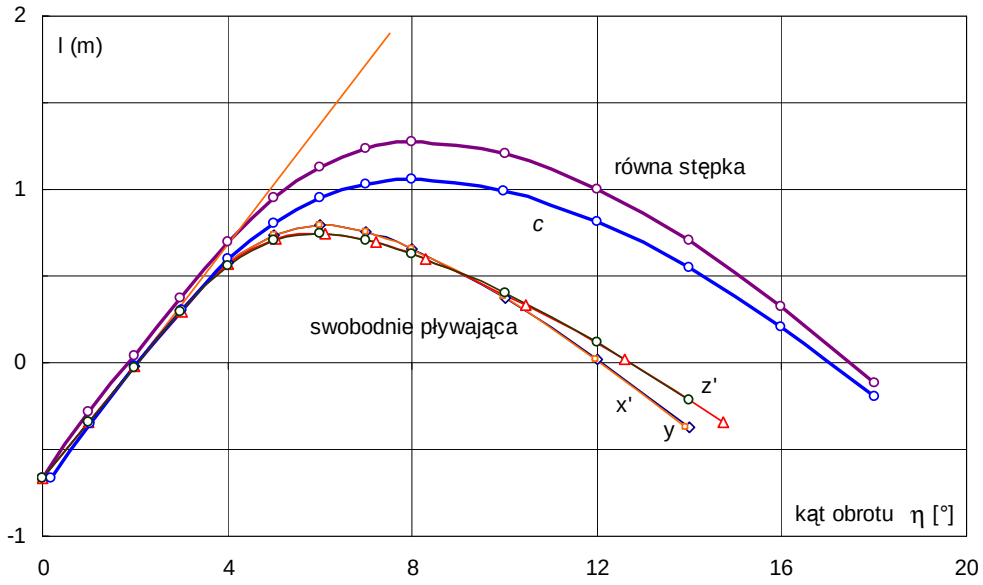
długość ..... $L = 73{,}659$ m,
szerokość ..... $B = 54{,}222$ m,
wysokość boczna ..... $H = 6{,}755$ m,
zanurzenie ..... $T = 5$ m,
współczynnik pełnotliwości wodnicy ..... $\alpha = 0{,}668$
stosunek głównych momentów bezwładności
wodnicy w położeniu wyprostowanym ..... $J_y/J_x = 1{,}73$.

Kształt platformy pokazany jest na Rys. 37, krzywe ramion na Rys. 38, zaś przebieg przegłębień na Rys. 39–40. Obliczenia wykonane zostały dla platformy uszkodzonej, przegłębionej na rufę, z początkowym przechyłem na prawą burtę równym 2°, dla tych samych opcji obliczeniowych, co dla kutra, przechylanej na prawą burtę.

Jak widać z Rys. 38, analogicznie jak dla kutra, w początkowym zakresie stateczności wszystkie opcje dają praktycznie takie same wartości ramion. Widoczne pewne różnice dotyczą jedynie platformy na równej stępce. Wynikają one z faktu, że – z powodu niesymetrycznego zatopienia – główna oś bezwładności wodnicy początkowej odchylona jest od PS, gdy w tej opcji przyjmuje się oś obrotu równoległą do PS. Największe wartości ramion ma platforma na równej stępce, znacznie zawyżając zakres stateczności. Nieco mniejsze wartości ma statek o stałym przegłębieniu, jakie występuje w położeniu równowagi (krzywa *c*). Obie krzywe zbiegają się, gdy kąt przechyłu dąży do 90°.

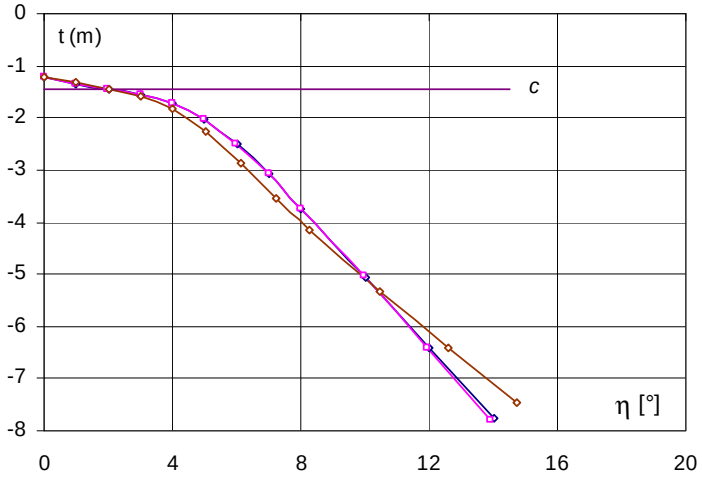


Rys. 37. Platforma samopodnośna I



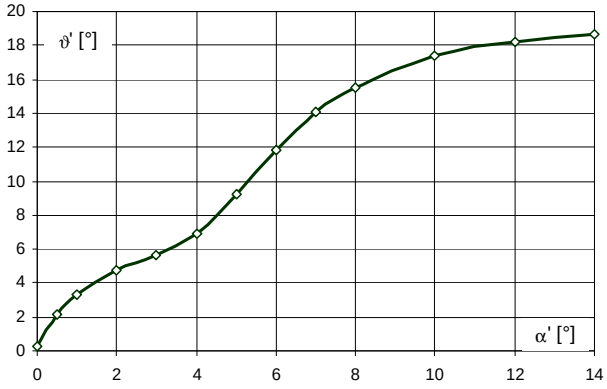
Rys. 38. Krzywe ramion platformy I dla przechyłów na prawą burtę (w stronę wstępnego przechyłu)

Krzywe ramion platformy swobodnie pływającej są oczywiście mniejsze, niż w przypadku braku równoważenia. Sposób równoważenia ma niewielki wpływ na te krzywe. Osie referencyjne *Ox′* i *Oy* dają niemal identyczne ramiona, gdyż kąty przechyłu φ i ϕ są praktycznie takie same. Stąd, krzywe te pokrywają się ze sobą. Natomiast kąty α′ są nieco większe od φ i ϕ, stąd zakres krzywej ramion dla osi referencyjnej *Oz′* jest nieco większy od dwóch pierwszych krzywych. Ponieważ pola pod krzywymi muszą być takie same, krzywa o większym zakresie przecina się z krzywymi o mniejszym zakresie. Mimo sporych przegłębień w PS (Rys. 39), różnice między kątami przechyłu φ, ϕ i α′ nie przekraczają 1°.

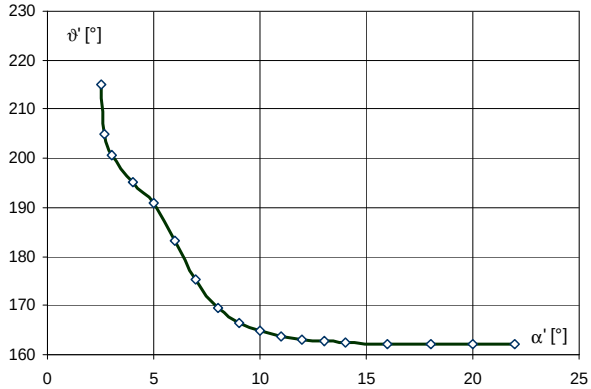


Rys. 39. Przebieg przegłębień w PS platformy I, w zależności od osi referencyjnej

Przebieg kąta skręcenia (przegłębienia) platformy wokół osi *Oz′* w funkcji kąta przechyłu α′ na prawą burtę pokazuje Rys. 40. Z powodu niesymetrycznego zatopienia i małego stosunku *L*/*B*, kąty skręcenia przyjmują duże wartości, a dla przechyłów na lewą burtę, wykres nie jest antysymetryczny (Rys. 41). Jak widać, zakres zmian kąta skręcenia jest dużo większy, niż podczas przechyłów na prawą burtę, i ma inny charakter. Dla kątów α′ < 2,5° na lewą burtę kąt skręcenia jest nieokreślony. Podobnie inne przebiegi otrzymalibyśmy dla „przechyłów” na dziób i rufę.



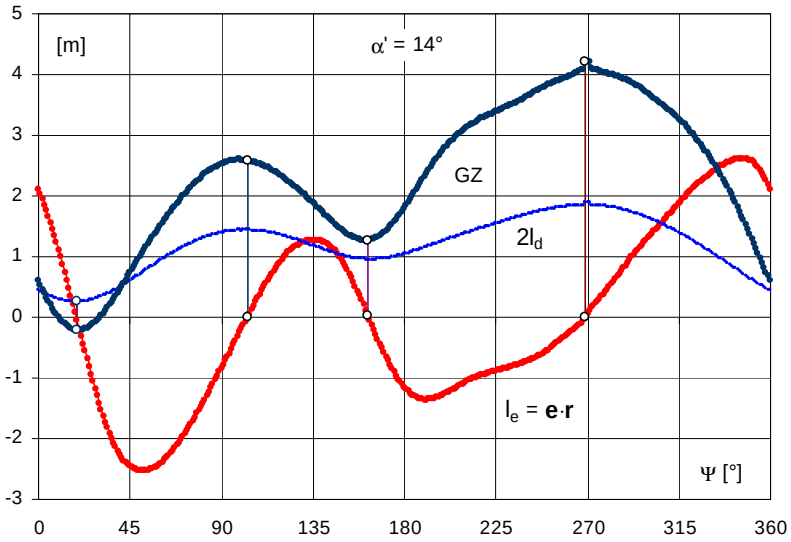
Rys. 40. Przebieg kąta skręcenia wokół osi *Oz′* podczas przechylania platformy I na prawą burtę



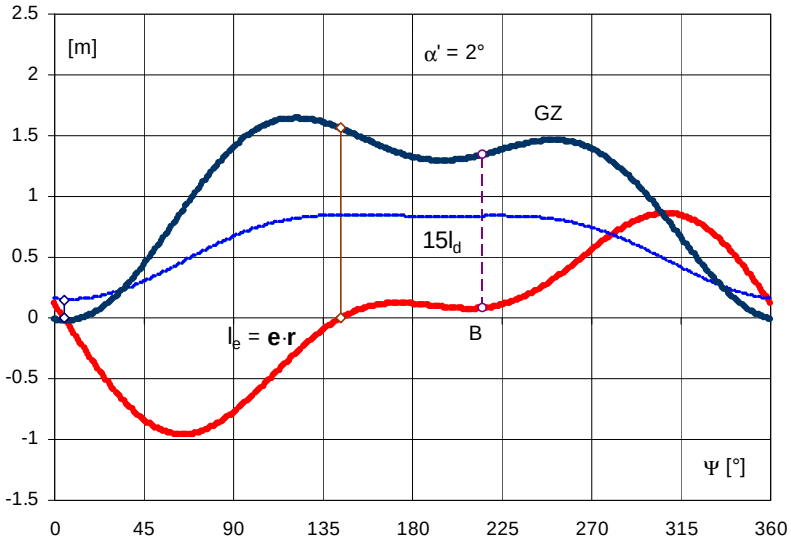
Rys. 41. Przebieg kąta skręcenia wokół osi *Oz′* podczas przechylania platformy I na lewą burtę

Przebieg charakterystyk stateczności platformy I w funkcji kąta skręcenia Ψ dla wybranego kąta przechyłu α′ = 14° pokazany jest na Rys. 42. Podobnie jak w przypadku kutra (Rys. 28), krzywe *l* i l_d posiadają dwa minima i dwa maksima, a co za tym idzie, występują cztery położenia równowagi: dwa równowagi trwałej i dwa chwiejnej. Z powodu wstępnego przechyłu, przebieg krzywych jest bardziej skomplikowany, niż dla kutra, co wynika ze wzoru (42). Przy

pierwszym położeniu równowagi, które jest stabilne, minimum krzywych l i l_d jest absolutne. Trzecie miejsce zerowe odpowiada przechyłowi na drugą burtę, gdzie występuje drugie minimum krzywej l_d. Cztery miejsca zerowe krzywej l_e oznaczają, że ramiona prostujące istnieją dla przechyłów w obie strony. W przypadku platform niesymetrycznie zatopionych tak jednak nie jest. Dla pewnych kątów przechyłu na burtę przeciwną do wstępnego przechyłu krzywa l_e ma tylko dwa miejsca zerowe, jak na Rys. 43, i jedno minimum ramienia dynamicznego l_d.



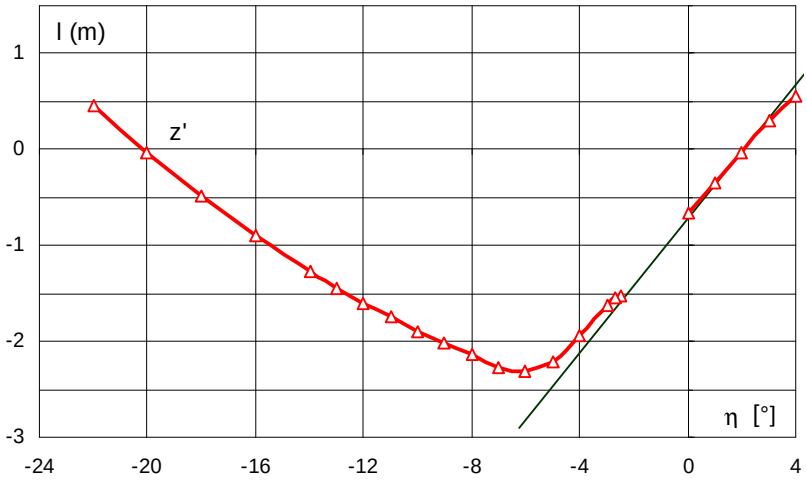
Rys. 42. Przebieg poprzecznej i wzdłużnej składowej ramienia prostującego l oraz dynamicznego l_d platformy I w funkcji kąta skręcenia Ψ, dla zadanego kąta przechyłu



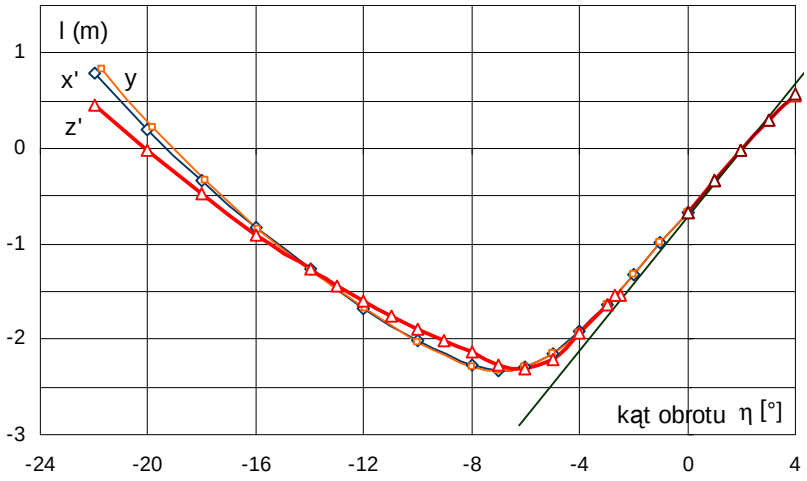
Rys. 43. Przebieg charakterystyk stateczności platformy I w funkcji kąta skręcenia Ψ dla α' = 2°

W przypadku platformy I taka sytuacja występuje dla kątów przechyłu $\alpha' < 2{,}5°$ (dla $\alpha' = 2{,}5°$ punkt B krzywej l_e staje się styczny do osi odciętych). Oznacza to, że dla przechyłów na lewą burtę nie da się zrównoważyć platformy wzdłużnie, a tym samym, nie da się wyznaczyć krzywej ramion platformy swobodnie pływającej, ani kąta skręcenia. Zauważmy, że w przedziale $\Psi \approx 165° \div 215°$ (Rys. 43), czyli na płaskim odcinku l_e do punktu B równowaga jest obojętna, tj. wzdłużna wysokość metacentryczna $H_{L\vartheta} \approx 0$, a powyżej tego punktu – chwiejna. W takim przypadku platforma samorzutnie obróci się o 180° wokół osi *Oz'*, by ustawić się w położeniu równowagi trwałej, odpowiadającym pierwszemu miejscu zerowemu krzywej l_e, przechylona na prawą burtę, gdzie występuje jedyne minimum ramienia dynamicznego l_d.

Dla przechyłów na prawą burtę krzywa ramion istnieje w całym zakresie (Rys. 38). Dla przechyłów na lewą burtę krzywa istnieje, gdy $\alpha' < -2{,}5°$, tj. gdy istnieje trzeci pierwiastek krzywej l_e, a wysokość metacentryczna $H_{L\vartheta} > 0$ (przybliżony wzór (43) daje kąt $\alpha' = -1{,}9°$). Intuicyjnie każdy spodziewałby się, że dla przechyłów na stronę przeciwną do wstępnego przechyłu stateczność jest lepsza. Tak jest, ale dopiero dla kątów $\alpha' < -2{,}5°$ (Rys. 44), co widać lepiej na Rys. 46 – zakres krzywej, jak i maksymalne ramię są znacznie większe, niż dla przechyłów na prawą burtę. Jednak dla kątów $\alpha' \in \langle -2{,}5°, 0\rangle$, krzywa ramion nie istnieje z braku stateczności wzdłużnej ($H_{L\vartheta} < 0$), chyba że platforma obróci się o 180° wokół osi *Oz'*, przyjmując wartości, jak dla przechyłów na prawą burtę (Rys. 5). Dla innych osi referencyjnych problemu tego nie ma – krzywe ramion istnieją dla dowolnych kątów na lewą burtę (Rys. 45, Rys. 46), przy czym uzupełniają one krzywą ramion dla osi *Oz'* w przedziale, gdzie jest nieokreślona.

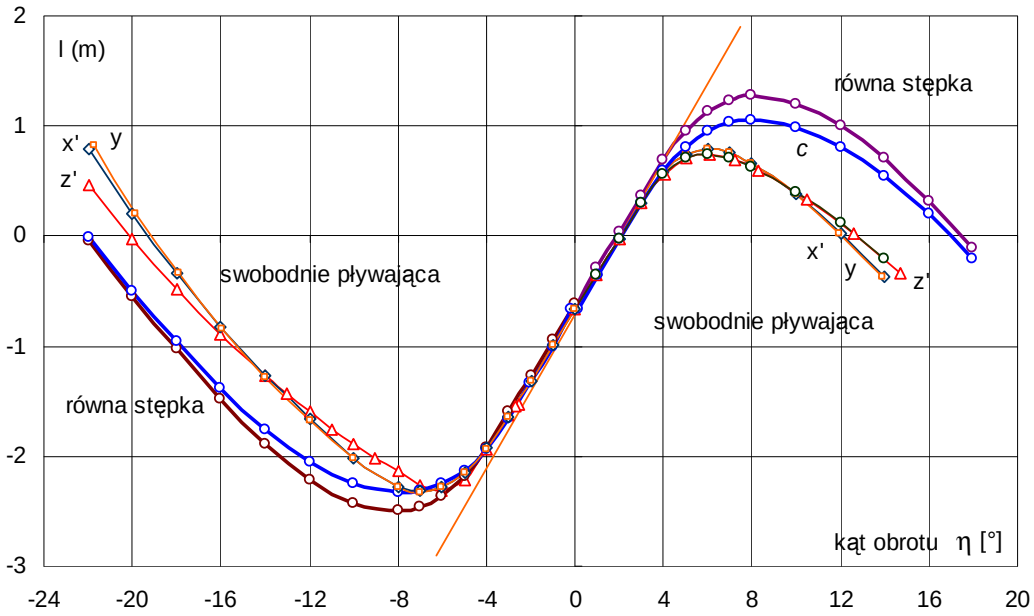


Rys. 44. Krzywa ramion platformy I dla przechyłów na lewą burtę wg osi *Oz'*



Rys. 45. Krzywe ramion platformy I dla przechyłów na lewą burtę

Ze wzoru (42) wynika, że w położeniu wyprostowanym $\alpha' = 0$ wysokość metacentryczna $H_{L\vartheta}$ ma nieciągłość; po jednej stronie jest dodatnia i krzywa ramion istnieje, a po drugiej jest ujemna i krzywa ramion na pewnym odcinku nie istnieje, co potwierdza Rys. 44. Jest to cecha statków swobodnie pływających ze wstępnym przechyłem, kłócąca się z intuicją.

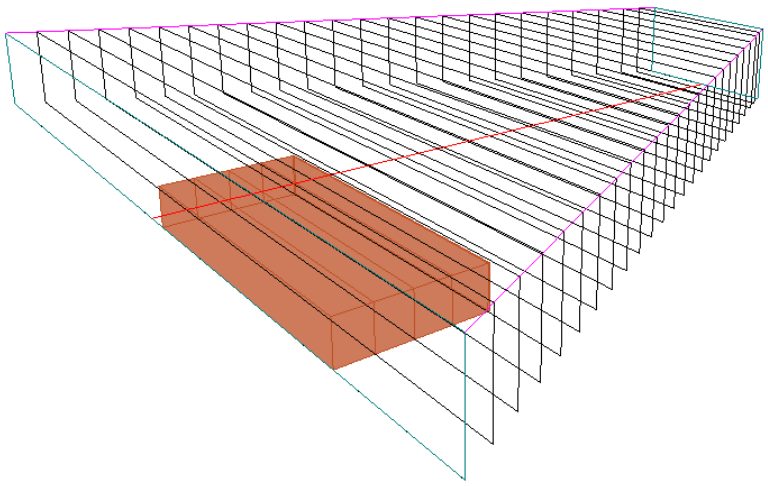


Rys. 46. Krzywe ramion platformy I dla przechyłów na obie burty

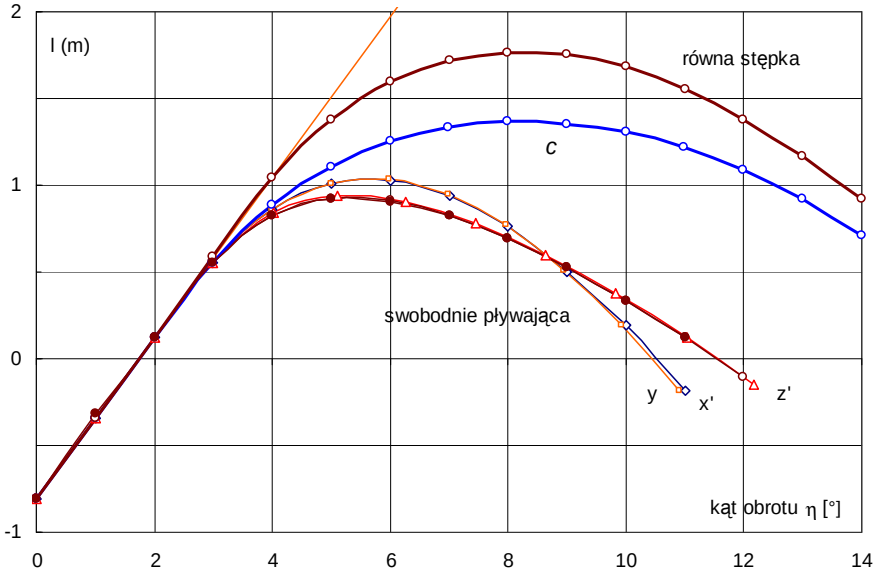
Wymiary główne platformy II są następujące:

długość ..... L = 58,1 m,
maksymalna szerokość ..... B_0 = 72,2 m,
minimalna szerokość ..... B_1 = 14 m
wysokość boczna ..... H = 7 m,
zanurzenie ..... T = 4,65 m,
współczynnik pełnotliwości wodnicy ..... α = 0,597,
wznios środka ciężkości nad PP ..... KG = 24,37 m,
stosunek głównych momentów bezwładności
wodnicy w położeniu wyprostowanym ..... J_y/J_x = 1,06.

Jest to fikcyjna platforma samopodnośna o prostym kształcie geometrycznym (Rys. 47), zaproponowana przez ABS z myślą o testowaniu obliczeń, wielokrotnie badana w literaturze [20, 23, 24]. Krzywe ramion przedstawione są na Rys. 48, zaś przebieg przegłębień na Rys. 49–50. Obliczenia wykonane zostały dla platformy uszkodzonej, przegłębionej na rufę (t = –2,058 m), z przechyłem na prawą burtę równym 1,73°.

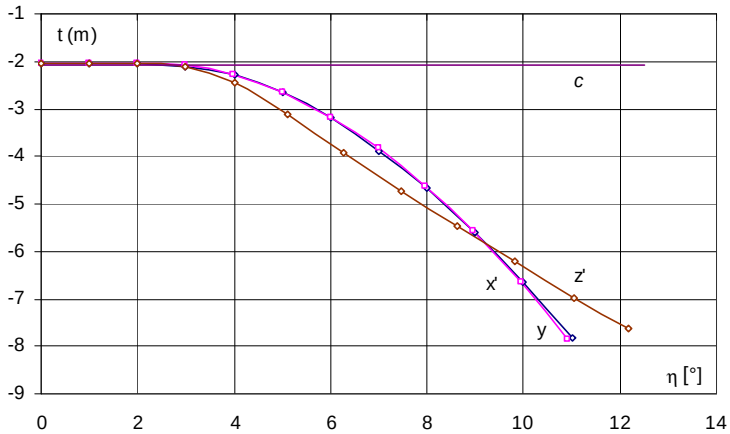


Rys. 47. Platforma II



Rys. 48. Krzywe ramion platformy II dla przechyłów na prawą burtę

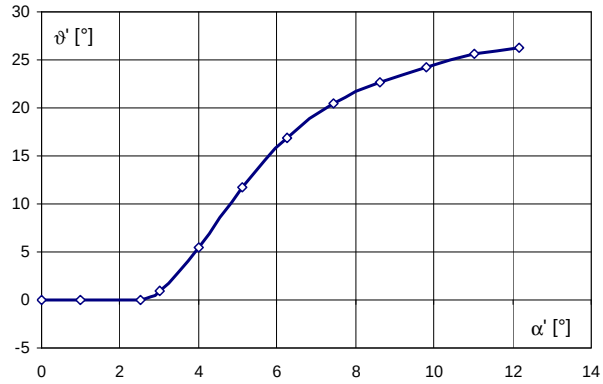
Jak widać z Rys. 48, wszystkie opcje obliczeniowe dają praktycznie te same wartości ramion w początkowym zakresie stateczności. Powyżej tego zakresu, największe wartości ma platforma na równej stępce. Jak w przypadku poprzedniej platformy, sposób równoważenia ma niewielki wpływ na ramiona. Osie referencyjne *x* i *y* także dają niemal identyczne ramiona, gdyż kąty przechyłu φ i ϕ, mimo sporych przegłębień w PS (Rys. 49), są niemal takie same, co świadczy, że osie obrotu ***e*** są niemal równoległe, stąd krzywe te pokrywają się ze sobą. Natomiast kąty α′ są nieco większe od kątów φ i ϕ, co skutkuje – jak poprzednio – nieco większym zakresem krzywej ramion. Ponieważ pola pod krzywymi muszą być takie same, krzywa o większym zakresie przecina się z krzywymi o mniejszym zakresie i ma mniejszą wartość maksymalną. Jeśli oś obrotu ***e*** dla osi referencyjnych *Ox*′′, *Oy*′ i *Oz*′ są takie same$_1$, to krzywe ramion odpowiadają minimalnej stateczności,. Potwierdza to Rys. 48, gdzie wspomniane trzy krzywe pokrywają się ze sobą.



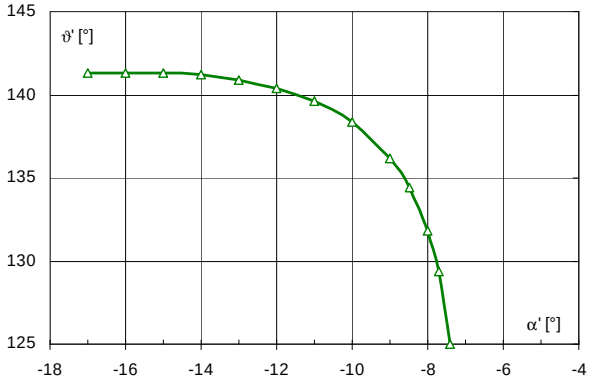
Rys. 49. Przebieg przegłębień platformy II w PS, w zależności od osi referencyjnej

Przebieg kąta skręcenia (przegłębienia) wokół osi *Oz*′ w funkcji kąta przechyłu pokazuje Rys. 50. Z powodu niesymetrycznego zatopienia i małego stosunku *L*/*B* kąty te przyjmują jeszcze większe wartości, niż dla platformy I. Jednak sama wodnica jest symetryczna, co skutkuje skręcaniem (obracaniem się) platformy dopiero powyżej kąta wejścia pokładu do wody. Jak poprzednio, dla przechyłów na lewą burtę wykres ma inny charakter (Rys. 51). Zakres zmia-

ny kąta skręceni dla przechyłów na lewą burtę wynosi 16°, gdy na prawą wynosi 26°, a dla kątów przechyłu $\alpha' < 7{,}4°$ na lewą burtę – kąt skręcenia jest nieokreślony. Oznacza to, że w przedziale $\alpha' \in \langle -7{,}4°, 0\rangle$ krzywa ramion jest nieokreślona (przybliżony wzór (43) daje kąt $\alpha' \approx -3.1°$).



Rys. 50. Przebieg kąta skręcenia wokół osi *Oz*′ podczas przechylania platformy II na prawą burtę

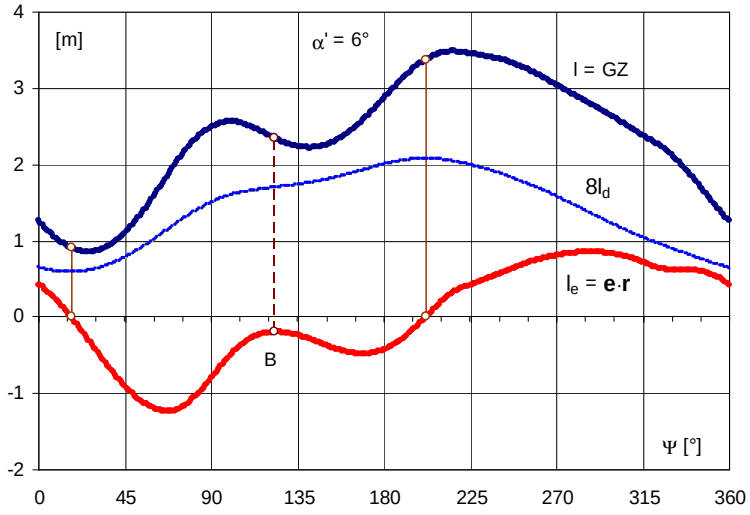


Rys. 51. Przebieg kąta skręcenia wokół osi *Oz*′ podczas przechylania platformy II na lewą burtę

Przebieg charakterystyk stateczności platformy II w funkcji kąta skręcenia Ψ dla kąta $\alpha' = 11°$ pokazuje Rys. 19. Podobnie jak w przypadku platformy I (Rys. 42), także tu występują cztery położenia równowagi, którym odpowiadają ekstrema ramienia prostującego l i ramienia dynamicznego l_d. Krzywa ramion prostujących $l = GZ$ posiada jednak dwa dodatkowe ekstrema, którym odpowiadają punkty przegięcia na krzywej ramion dynamicznych l_d. Powodem takiego zachowania jest mały stosunek głównych momentów bezwładności wodnicy w położeniu wyprostowanym, bliski 1. Dla platformy II wynosi on 1,06, gdy dla platformy I – 1,73. Tym niemniej, jak w poprzednich przypadkach – w pierwszym położeniu równowagi minimum krzywych l i l_d jest absolutne, a trzecie miejsce zerowe odpowiada przechyłowi na burtę przeciwną, przy czym jest ono symetryczne względem 90° w stosunku do pierwszego miejsca zerowego.

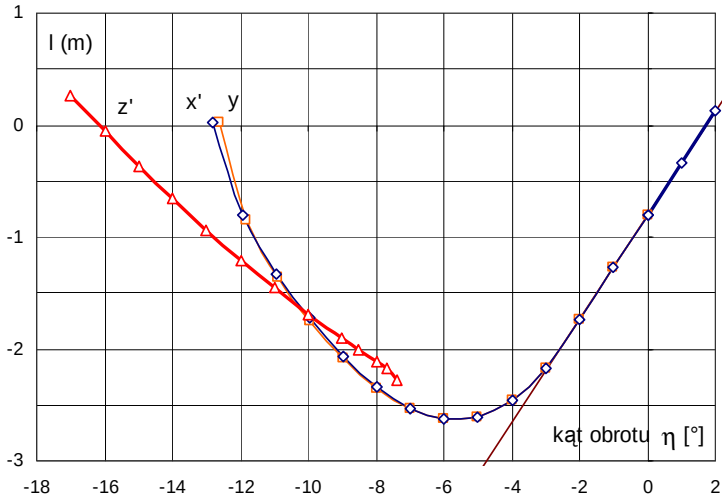
Jak sugeruje Rys. 19, na *powierzchni* ramion dynamicznych $l_d = l_d(\alpha', \Psi)$ platformy II powinny występować *dwie* doliny (ścieżki), odpowiadające minimum l_d. Tymczasem Rys. 22 pokazuje *trzy* ścieżki (trzy minima). Co prawda, obydwa rysunki odpowiadają różnym osiom referencyjnym lecz wybór osi nie wpływa znacząco na ramiona dynamiczne.

Przebieg charakterystyk stateczności dla kąta przechyłu $\alpha' = 6°$ pokazuje Rys. 52. Widzimy, że różnią się one od przebiegu tych charakterystyk dla kąta $\alpha' = 11°$ (Rys. 19). Krzywa l_e ma



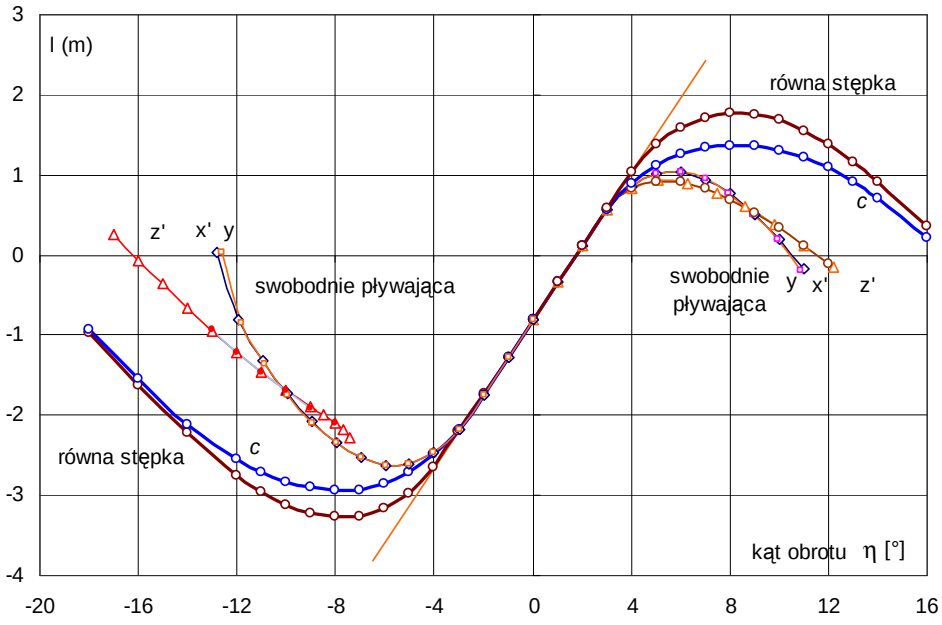
Rys. 52. Przebieg krzywych l, l_d i l_e w funkcji kąta skręcenia Ψ dla kąta $\alpha' = 6°$

teraz dwa miejsca zerowe, zamiast czterech. Miejsca zerowe precyzyjnie pokrywają się z ekstremami krzywej ramion dynamicznych l_d, lecz wyraźnie rozmijają się z ekstremami krzywej *GZ*. Wierzchołek *B* krzywej l_e staje się styczny do osi odciętych dla kąta $\alpha' \approx 7{,}4°$. Dla kątów przechyłu $\alpha' > 7{,}4°$ mamy cztery miejsca zerowe krzywej l_e (Rys. 19), co jest warunkiem istnienia krzywej ramion dla przechyłów na lewą burtę. W przedziale $\alpha' \in \langle -7{,}4°, 0\rangle$ krzywa ta nie istnieje (Rys. 53), chyba że platforma obróci się o 180° wokół osi *Oz'*, przyjmując wartości, jak



Rys. 53. Krzywe ramion platformy II dla przechyłów na lewą burtę

dla przechyłów na prawą burtę. Ze względu na jeszcze mniejszy stosunek głównych momentów bezwładności wodnicy w położeniu wyprostowanym i większą asymetrię zatopienia (duże ramię ujemne w położeniu wyprostowanym) przedział wygaszenia krzywej ramion jest większy, niż w poprzednim przypadku, co wynika też z przybliżonego wzoru (43). Z kolei, dla osi referencyjnych *Ox'* i *Oy* krzywe ramion nie istnieją dla kątów poniżej −13° (Rys. 53, Rys. 54). Nie są to jednak krzywe minimalnej stateczności.

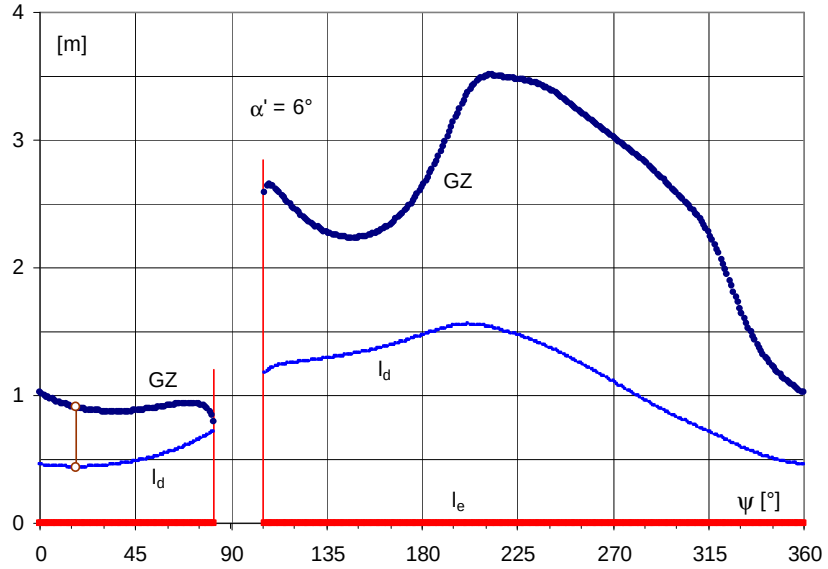


Rys. 54. Krzywe ramion platformy II dla przechyłów na obie burty

Kąt skrętu Ψ i krzywa ramion *l* dla przechyłów na lewą burtę pokazane są na Rys. 51 i Rys. 53. Jak widać, charakterystyki te istnieją dla kąta $\alpha' < -7{,}4°$. Otrzymane zostały one z odczytów dla

trzeciego miejsca zerowego krzywej l_e, jak na Rys. 19. Identyczną krzywą ramion otrzymuje się z bezpośrednich obliczeń dla przechyłów na lewą burtę.

Przebieg charakterystyk stateczności dla kąta przechyłu $\alpha' = 6°$ w funkcji azymutu dla osi referencyjnej Ox'' pokazuje Rys. 55. Widzimy, że różnią się one od przebiegu tych charakterystyk dla osi referencyjnej Oz' (Rys. 52). Tym niemniej, obydwa wskazują na identyczne cechy.



Rys. 55. Przebieg ramienia prostującego $l \equiv GZ$ oraz dynamicznego l_d platformy II w funkcji azymutu Ψ, dla przechyłu mniejszego od krytycznego

Także tu, z uwagi na to, że kąt przechyłu $\alpha' = 6°$ jest poniżej wartości krytycznej 7,4°, wykres ramienia dynamicznego l_d w funkcji azymutu ma tylko jedno minimum. Minimum to wyznacza ramię prostujące krzywej minimalnej stateczności dla przechyłu $\alpha' = 6°$ w stronę wstępnego przechyłu, identyczne, jak na Rys. 52. Brak drugiego minimum oznacza, że dla przechyłu na drugą stronę ramię prostujące nie istnieje. Jak wiemy z wcześniejszych rozważań, w przedziale kątów $\alpha' \in \langle -7{,}4°, 0° \rangle$ krzywa ramion nie istnieje, gdyż w tym przedziale kątów nie da się wzdłużnie zrównoważyć jednostki. Z rysunku 54 wynika ponadto, że dla azymutu z przedziału $\psi \in \langle 86°, 106° \rangle$ platformy nie da się zrównoważyć wzdłużnie, gdy kąt przechyłu $\alpha' = 6°$.

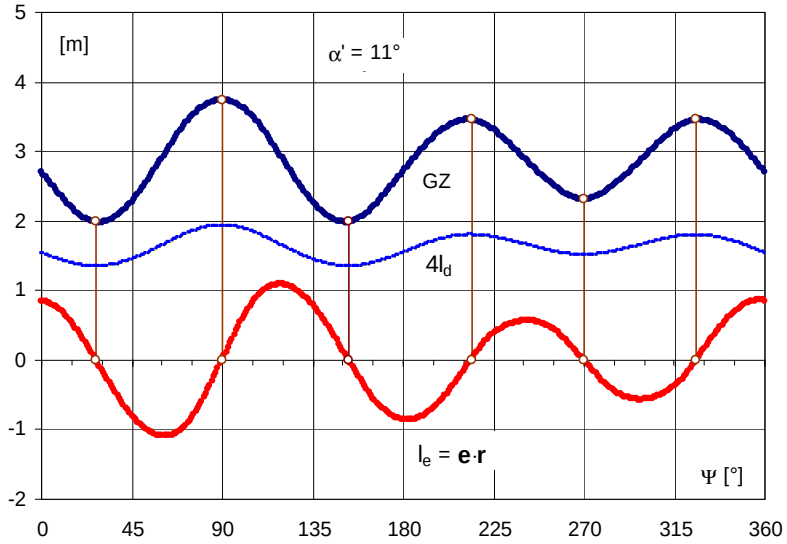
W przypadku jednostek zatopionych niesymetrycznie ekstrema krzywych ramion l mają pewne przesunięcie względem położenia równowagi. Można pokazać, że przesunięcia nie ma, gdy oś obrotu $\boldsymbol{e}$ jest równoległa do głównej osi bezwładności wodnicy . Dowód jest prosty – musimy zróżniczkować względem przegłębienia ramię prostujące $l \equiv GH$, dane wzorem (22). Uwzględniając, że wersor osi obrotu $\boldsymbol{e}$ nie podlega różniczkowaniu, otrzymamy:

$$l' = \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{n}) + \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}')$$

gdzie $'$ oznacza różniczkowanie względem przegłębienia. Łatwo pokazać, różniczkując względem ϑ wersor $\boldsymbol{n}$, dany wzorem (54), że wektor $\boldsymbol{n}' = \sin\alpha\,\boldsymbol{e}$ jest równoległy do osi obrotu $\boldsymbol{e}$, dlatego drugi wyraz odpada na mocy własności iloczynu mieszanego. Z kolei wektor $\boldsymbol{r}'$ posiada dwie składowe: wzdłużną i poprzeczną do osi obrotu. Przyczynek daje jedynie składowa poprzeczna $\boldsymbol{r}'_T = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e} D''/V$, gdzie różniczkowanie jest względem τ, zaś D'' jest momentem dewiacyjnym wodnicy w układzie $\xi''\eta''$ (Rys. 11), związanym z osią obrotu $\boldsymbol{e}$, tak więc:

$$\partial/\partial\tau\, l = -D''/V \tag{60}$$

Ze wzoru (60) wynika, że w położeniu równowagi występuje ekstremum ramienia prostującego l, gdy $D'' = 0$, czyli gdy główna oś bezwładności wodnicy jest równoległa do osi obrotu $\boldsymbol{e}$. W przypadku statków konwencjonalnych, nawet w stanie awaryjnym, odchylenie głównej osi bezwładności od osi obrotu jest nieznaczne, stąd przesunięcie ekstremum l w stosunku do położenia równowagi jest niezauważalne. W przypadku platform uszkodzonych, gdy występują cztery miejsca zerowe, przesunięcie to nie jest duże, lecz zauważalne (Rys. 19, Rys. 42), a gdy występują dwa miejsca zerowe, przesunięcie jest wyraźne (Rys. 43, Rys. 52).



Rys. 56. Przebieg charakterystyk stateczności platformy II nieuszkodzonej w funkcji kąta skręcenia Ψ, dla ustalonego kąta przechyłu

Warto zobaczyć, jak wygląda przebieg tych samych charakterystyk stateczności w funkcji kąta skręcenia Ψ dla tego samego wybranego kąta przechyłu $\alpha' = 11°$, ale dla nieuszkodzonej platformy II. Wykres taki pokazany jest na Rys. 56.

Jak w przypadku statków nieuszkodzonych bez przechyłu wstępnego, krzywe $l = GZ$ i l_d są symetryczne, a krzywa $l_e = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}$ antysymetryczna względem kąta $\Psi = 90°$ i 270°. W odróżnieniu jednak od kutra (Rys. 28), mamy tu dwa dodatkowe miejsca równowagi wzdłużnej, w których krzywa ramion prostujących l i ramion dynamicznych l_d ma ekstrema. Tak więc, w tym przypadku powierzchnia ramion dynamicznych $l_d = l_d(\alpha', \Psi)$ posiadałaby *trzy* doliny, odpowiadające minimum l_d. Pierwsze dwa minima, odpowiadające przechyłom na lewa i prawą burtę, są równe sobie, lecz mniejsze od trzeciego.

8. WNIOSKI

W pracy podano podstawy teoretyczne wyznaczania krzywej ramion prostujących statku swobodnie pływającego, tj. wzdłużnie zrównoważonego podczas przechylania. Przedstawiono trzy opcje obliczeń: 1) "inżynierską", związaną z osią x' lub x'', 2) "fizyczną", związaną z osią y lub y', 3) "naturalną", związaną z osią z', tożsamą z minimum stateczności. Wyniki przeprowadzonych rozważań, popartych obliczeniami numerycznymi, można podsumować następująco:

a) statek swobodnie pływający posiada minimalną stateczność w sensie pola pod krzywą ramion. Pole to nie zależy od wyboru osi referencyjnych i jest najmniejsze z możliwych

b) równoważenie statku nie zmienia kierunku momentu prostującego w przestrzeni, natomiast zmniejsza jego wartość w proporcji do przegłębienia po zrównoważeniu

c) w początkowym zakresie stateczności wszystkie opcje obliczeniowe, łącznie ze stałym przegłębieniem, są praktycznie identyczne
d) dla statków konwencjonalnych krzywe ramion nie zależą od osi referencyjnej (sposobu równoważenia), a dla platform wpływ jest niewielki
e) gdy jednostka ma wstępny przechył, krzywa ramion jest nieokreślona w pewnym jednostronnym sąsiedztwie zera, przeciwległym do wstępnego przechyłu, którego długość rośnie ze wstępnym przechyłem. Dla statków jest on rzędu minut kątowych, a dla platform – rzędu stopni. Azymut (skręt) jednostki w tym przedziale jest niestateczny, tzn. jednostka może się samoczynnie obrócić wokół osi *Oz′* o 180°, by przyjąć stateczny przechył na stronę wstępnego przechyłu
f) dla jednostek swobodnie pływających znaczenie ma tylko jedna krzywa ramion minimalnej stateczności, jak dla osi referencyjnej *Oz′*. Dla innych azymutów występują przedziały, w których krzywa ramion jest nieokreślona
g) pojęcie pantokaren jest ważne także dla statku swobodnie pływającego o minimalnej stateczności, gdy środek ciężkości zmienia się wzdłuż osią *Oz′*, normalnej do wodnicy pierwotnej
h) wskazane jest wykonywanie obliczeń krzywej ramion za pomocą metody wodnic równoobjętościowych (Kryłowa–Dargniesa), przechylanych wokół chwilowej osi pływania ***f***. Metoda ta znacznie skraca czas obliczeń (16÷25 razy) w stosunku do metod wypornościowych. Obliczenia nie wymagają bowiem żadnych iteracji

Dla statków o kształtach konwencjonalnych nie ma więc rewolucji – jakkolwiek nie obliczać krzywych ramion statku swobodnie pływającego, są takie same, tożsame z minimum stateczności. Rewolucyjny jest natomiast wniosek dla platform – rzeczywiste znaczenie ma tylko jedna krzywa ramion dla przechyłów poprzecznych, jak w wypadku osi referencyjnej *Oz′*. Inaczej mówiąc, dla platform swobodnie pływających nie ma krzywych ramion dla różnych azymutów, czego wymagają przepisy. W przypadku osi *Oz′* są one takie same, niezależnie od azymutu, a w przypadku innych osi referencyjnych mają, co prawda, większe wartości, lecz okupione przedziałami niestabilności, w których nie można statku zrównoważyć. Jakie więc krzywe ramion były liczone? Albo krzywe platformy niezrównoważonej wzdłużnie lub źle równoważonej. To ostatnie jest bardzo prawdopodobne, gdyż w literaturze nie używa się takich pojęć, jak oś referencyjna, oś obrotu, płaszczyzna obrotu, czy kąt obrotu płaszczyzny obrotu. Na przykład, w ciekawych pracach [20, 21, 23, 24], nie jest powiedziane, w jakiej płaszczyźnie platforma była równoważona.

OD AUTORA

Praca powstawała etapami przez wiele lat. Wprowadzenie do problematyki statku swobodnie pływającego pochodzi z unikatowej książki [22]; rozwinięte zaś zostało w pracach [4–7]. Były one wynikiem pobytu autora w Glasgow University (1987) i University of Newcastle upon Tyne (1992) w Wielkiej Brytanii na rocznych stypendiach Visiting Senior Research Fellowship, przyznanych przez te uniwersytety. Doping do systematycznego rozwijania tych badań wiązał się z zaangażowaniem autora w prace Podkomitetu SLF IMO w latach 1979–1996. W testowaniu wyników obliczeń dla kutra brał udział Joost van Santen z GustoMSC w Holandii.

BIBLIOGRAFIA

1. W i m a l s i r i W. K. *Design of ro-ro cargo ships with particular reference to damage survivability*, PhD thesis, Dept. of Marine Technology, University of Newcastle upon Tyne, 1991, 271 s.

2. V a s s a l o s D., K o n s t a n t o p o u l o s G., K u o C., W e l a y a Y. *A realistic approach to semisubmersible stability,* SNAME Transactions, Vol. 93, 1985, s. 96–128.
3. S a n t e n v a n J. A. *Stability calculations for jack-ups and semi-submersibles,* Conference on Computer Aided. Design, Manufacturer and Operation in the Marine and Offshore Industries – CADMO '86, Washington D.C., Sept. 1986
4. P a w ł o w s k i M. *On the roll angle for a freely floating rig,* Proceedings, 9th Intl. Symposium on Ship Hydromechanics HYDRONAV '91, Gdansk–Sarnówek, Sept. 1991, Vol. I, s. 23–26; także w: Budownictwo Okrętowe i Gospodarka Morska, R. 36, listopad 1991, nr 11(397), s. 24–26, ISSN 0007-3008
5. P a w ł o w s k i M. *Some inadequacies in the stability rules for floating platforms*, The Naval Architect, No. 2, 1992, s. 889–894.
6. P a w ł o w s k i M. *Advanced stability calculations for a freely floating rig,* Proceedings, 5th Intl. Symposium on Practical Design of Ships and Mobile Units PRADS'92, Newcastle upon Tyne, 1992, vol. II, s. 1146–1160; także w: Report, Dept. of Marine Technology, University of Newcastle upon Tyne, Nov. 1991.
7. P a w ł o w s k i M. *Stateczność statku swobodnie pływającego*, angielska wersja: *Stability of freely floating ship*, Part I, *Polish Maritime Research*, R (44)(2005), vol. 12, nr 2, s. 3–9, Part II, R (44)(2005), vol. 12, nr 3, s. 3–8, ISSN 1233-2585
8. B o u g u e r P. *Traité du navire, de sa construction et de ses mouvemens (Treatise of the ship, its construction and its movements*), Jombert, Paris, 1746.
9. A t w o o d G. *The construction and analysis of geometrical propositions, determining the positions assumed by homogenous bodies which float freely, and at rest on a fluid's surface; also Determining the stability of ships and of other floating bodies*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 86, pp. 46-278, 1796.
10. K a ź m i e r c z a k J. *Pływalność i stateczność okrętu*, Warszawa, Wydawnictwa Komunikacyjne, 1954.
11. S t a l i ń s k i J. *Teoria okrętu*, Gdynia, Wydawnictwo Morskie, 1961.
12. R e e d E. *A Treatise on the stability of ships*, London, Charles Griffin & Co., 1885.
13. R a h o l a J. *The judging of the stability of ships and the determination of the minimum amount of stability*, PhD thesis, University of Helsinki, 1939.
14. International Maritime Organisation: *International code on intact stability*, London, IMO, 2008 (2009 Edition), ISBN 978 -92-801-15062
15. International Maritime Organisation: *Subdivision and damage stability of cargo ships*, SOLAS Convention, Consolidated Edition 1997, chapter II–1, part B–1, s. 89–99, London, IMO, ISBN 92-801-1433-6
16. P a w ł o w s k i M. *A closed form assessment of the capsizal probability – the s_i factor*, Proceedings, WEGEMT Workshop on Stability of Ships, Technical University of Denmark (DTU), Lyngby, October 1995.
17. V a s s a l o s D., P a w ł o w s k i M., T u r a n O. *Criteria for survival in damaged condition*, Proceedings, Intl. Seminar on the Safety of ro-ro Passenger Vessels, RINA, London, June 1996, 15 s.; także w: *Dynamic stability assessment of damaged passenger ro-ro ships and proposal of rational survival criteria*, Marine Technology, Vol. 34, No. 4, October 1997, s. 241–266.
18. P a w ł o w s k i M. *A modified static equivalency method for roll-on/roll-off vessels*, Journal of Ship Research, Vol. 51, No. 1, March 2007, s. 39–46.
19. P a w ł o w s k i M. *Survival criteria for passenger ro–ro vessels and survival time*, Marine Technology, Vol. 44, No. 1, January 2007, s. 27–34.

20. S a n t e n v a n J. A. *The use of energy build up to identify the most critical heeling axis direction for stability calculations for floating offshore structures*, Proceedings, 10th Intl. Conf. on Stability of Ships and Ocean Vehicles STAB 2009, Sankt Petersburg, 22–26 June 2009, s. 65–76.
21. S a n t e n v a n J. A. *Problems met in stability calculations of offshore rigs and how to deal with them*, Proceedings, 13th Intl. Ship Stability Workshop, Brest 23–26 September 2013.
22. S i e m i o n o v - T i a n - S h a n s k y W. W. *Statics and dynamics of ships*, Peace Publishers, Moscow, 1963, także w: *Статика и динамика корабля*, Leningrad, Sudpromgiz, 1960.
23. B r e u e r J. A., S j ö l u n d K. G. *Orthogonal tipping in conventional offshore stability evaluations*, Proceedings, 9th Intl. Conf. on Stability of Ships and Ocean Vehicles STAB 2006, Rio de Janeiro, 25–29 September 2006, s. 817–828.
24. B r e u e r J. A., S j ö l u n d K. G. *Steepest descent method – resolving an old problem*, Proceedings, 10th Intl. Conf. on Stability of Ships and Ocean Vehicles STAB 2009, Sankt Petersburg, 22–26 June 2009, s. 87–99. ■

ZAŁĄCZNIK – Transformacja momentów bezwładności

Elementy tensora bezwładności w układzie $x'y'$, obróconym względem układu xy o kąt α, dane są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} J_{x'x'} &= J_{xx}\cos^2\alpha + J_{yy}\sin^2\alpha + J_{xy}\sin 2\alpha \\ J_{y'} &= J_y\cos^2\alpha + J_x\sin^2\alpha + D\sin 2\alpha \\ J_{y'y'} &= J_{xx}\sin^2\alpha + J_{yy}\cos^2\alpha - J_{xy}\sin 2\alpha \\ J_{x'} &= J_y\sin^2\alpha + J_x\cos^2\alpha - D\sin 2\alpha \\ J_{x'y'} &= \tfrac{1}{2}(J_{yy} - J_{xx})\sin 2\alpha + J_{xy}\cos 2\alpha \\ D' &= \tfrac{1}{2}(J_x - J_y)\sin 2\alpha + D\cos 2\alpha \end{aligned}$$

Powyższe wzory mają podwójną notację: w pierwszym wierszu jest notacja tensorowa, a w drugim – notacja geometryczna (inżynierska).

Wprowadzając oznaczenia: $a = \tfrac{1}{2}(J_x - J_y)$ na promień przedziału bezwładności (w zastosowaniach okrętowych promień przedziału a jest zwykle ujemny) oraz $s = \tfrac{1}{2}(J_x + J_y)$ na środek przedziału, co daje $J_x = s + a$, $J_y = s - a$, wzory powyższe przyjmą postać:

$$\begin{aligned} J_{x'} &= s + a\cos 2\alpha - D\sin 2\alpha \equiv s + a' \\ J_{y'} &= s - a\cos 2\alpha + D\sin 2\alpha \equiv s - a' \\ D' &= a\sin 2\alpha + D\cos 2\alpha \end{aligned}$$

Jak widać, ślad tensora jest zachowany, tj. $J_{x'x'} + J_{y'y'} = J_{xx} + J_{yy} \equiv 2s$. Gdy moment dewiacyjny znika, tj. gdy $D' = 0$, tensor staje się diagonalny, z wartościami na głównej przekątnej, zwanymi *głównymi momentami bezwładności*. Zerowanie się D' wyznacza kierunki główne tensora, zwane *głównymi osiami bezwładności*. Stąd wynika kąt, dany wzorem $\operatorname{tg} 2\alpha = -D/a$, o który należy obrócić układ, by osie układu stały się głównymi osiami bezwładności. W układzie obróconym promień przedziału $a' \equiv a\cos 2\alpha - D\sin 2\alpha$.

Zauważmy, że promień przedziału, jak i moment dewiacyjny w układzie obróconym są funkcjami harmonicznymi kąta obrotu. Zatem,

$$\begin{aligned} a' &= a\cos 2\alpha - D\sin 2\alpha \equiv r\cos(2\gamma + 2\alpha) \\ D' &= a\sin 2\alpha + D\cos 2\alpha \equiv r\sin(2\gamma + 2\alpha) \end{aligned}$$

gdzie $r \equiv (a^2 + D^2)^{1/2}$ jest amplitudą funkcji harmonicznej (promieniem koła Mohra), zaś kąt 2γ jest fazą funkcji harmonicznej, gdzie $2\gamma = \mathrm{arctg}(D/a)$. Gdy promień przedziału $a < 0$, fazę $\mathrm{arctg}(D/a)$ należy powiększyć o 180°. Moment dewiacyjny zeruje się, gdy kąt obrotu $\alpha = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}(D/a)$. Momenty przyjmują wówczas wartości główne, o wartościach ekstremalnych: $J_{x'} \equiv J_1 = s - r$, zaś $J_{y'} \equiv J_2 = s + r$.

Ważniejsze oznaczenia literowe i symbole

a	pionowy wznios środka ciężkości nad środkiem wyporu w położeniu wyprostowanym
a	promień przedziału bezwładności wodnicy
C	środek pływania (środek ciężkości wodnicy)
D	moment dewiacyjny wodnicy
D	wypór okrętu (ciężar wypartej wody)
$\boldsymbol{e}$	kierunek osi obrotu (wersor normalny do płaszczyzny obrotu)
$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$	wersory śladu wody w PS i na owrężu
F	wolna burta
F	środek wyporu
$\boldsymbol{f}$	wersor osi pływania
g	przyspieszenie ziemskie
G	środek ciężkości statku
h_0	wysokość metacentryczna GM
HF	$= -\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}$, pionowy wznios środka ciężkości nad środkiem wyporu
H_L	$= R_L - HF$, wzdłużna wysokość metacentryczna
$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$	wersory układu $Oxyz$
$\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}'$	wersory układu $Ox'yz'$
$\boldsymbol{i}''$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$	wersory układu $Ox''y'z'$
$\boldsymbol{i}'$	wersor osi $Ox' = (\cos\theta_0, 0, \sin\theta_0)$
$\boldsymbol{k}'$	wersor osi $Oz' = (-\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0)$
J_1, J_2	główne momenty bezwładności wodnicy
J_T	poprzeczny moment bezwładności wodnicy statku swobodnie pływającego
J_η''	wzdłużny moment bezwładności wodnicy
L, B, T	długość, szerokość i zanurzenie (średnie) statku
l, l_d	ramię prostujące i ramię dynamiczne
l_e	$= \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}$, odległość środka wyporu od płaszczyzny obrotu
$\boldsymbol{n}$	wersor normalny do wodnicy, skierowany do góry
$Oxyz$	układ osi kadłuba, sztywno związany z kadłubem, którego początek jest w punkcie K (punkt przecięcia płaszczyzny symetrii PS, owręża i płaszczyzny PP)
$Ox'yz'$	układ $Oxyz$, obrócony o kąt θ_0 wokół osi Oy
$Ox''y'z'$	układ $Ox'yz'$, obrócony o kąt ψ wokół osi Oz', związany z płaszczyzną naporu wiatru
$OXYZ$	układ sztywno związany z płaszczyzną obrotu
P	ciężar statku
PP	płaszczyzna podstawowa
PS	płaszczyzna symetrii
$\boldsymbol{r}$	$\equiv \boldsymbol{GF} = (x_F - x_G, y_F - y_G, z_F - z_G)$, promieniem wodzącym środka wyporu względem środka ciężkości statku
r_F	$= J_T/V$, poprzeczny promień metacentryczny
R_L	$= J_\eta''/V$, wzdłużny promień metacentryczny

s	środek przedziału bezwładności (połowa biegunowego momentu bezwładności wodnicy względem środka pływania C)
V	wyporność objętościowa statku
$\boldsymbol{w}$	wersor śladu wody na wodnicy pierwotnej
Δl	korekta ramienia prostującego otrzymanego z pomocą pantokaren, uwzględniająca ukośne przemieszczenie środka ciężkości względem płaszczyzny obrotu przy zmianie wzniosu środka ciężkości statku nad PP
ϑ	kąt zawarty między śladem lustra wody i śladem PS w PP
ϑ'	kąt zawarty między śladem lustra wody i śladem PS na wodnicy pierwotnej
Θ	kąt nachylenia osi x względem lustra wody
α	kąt pomiędzy PP i lustrem wody
α'	kąt pomiędzy wodnicą pierwotną i lustrem wody
β	kąt pomiędzy śladami wody w PS i na owrężu
β'	kąt nachylenia osi obrotu $\boldsymbol{e}$ względem śladu PS na wodnicy
χ	kąt pomiędzy osią pływania $\boldsymbol{f}$ i osią obrotu $\boldsymbol{e}$
ϕ	kąt odchylenia PS od pionu, tożsamy z kątem nachyleniem osi y względem poziomu
γ	ciężar właściwy wody
γ	kąt pomiędzy główną osią bezwładności wodnicy a śladem wody w PS
$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$	odchylenie osi obrotu $\boldsymbol{e}$ od śladu wody w PS
η	kąt obrotu płaszczyzny obrotu w dowolnym przypadku
φ	kąt nachylenia śladu wody na owrężu względem osi y statku
θ	kąt nachylenia śladu wody w PS względem osi x
θ_0	kąt przegłębienia statku w położeniu wyprostowanym
ρ	gęstość wody
$\xi\eta$	układ osi wodnicy (oś ξ pokrywa się ze śladem wody w PS)
$\xi'\eta'$	układ centralny wodnicy, równoległy do układu $\xi\eta$
$\xi''\eta''$	układ centralny wodnicy, którego oś ξ'' jest równoległa do osi obrotu $\boldsymbol{e}$
$\xi_1\eta_1$	układ głównych osi bezwładności wodnicy
τ	kąt obrotu wodnicy wokół osi poprzecznej do osi obrotu $\boldsymbol{e}$
Ψ	$= \psi + \vartheta'$, skręcenie, kąt zawarty między śladem lustra wody i śladem PS na wodnicy pierwotnej dla platformy obróconej względem kierunku wiatru
ψ	azymut, kąt miedzy płaszczyzną naporu wiatru, a PS ■